

Mathematische Rechenmethoden 2

Martin Hohenadler

Sommersemester 2018

Vorwort

Das vorliegende Skript fand seinen Ursprung in einem Skript von Felix Spanier, meinem Vorgänger als Dozent dieser Vorlesung. Die Kapitel über Vektoranalysis beinhalten Ideen aus dem Skript von Professor Ian Lawrie (University of Leeds, Maths for physics 3).

Als weitere nützliche Quellen möchte ich folgende Bücher vorschlagen:

- Fischer, Kaul, Mathematik für Physiker, Band 1, Vieweg-Teubner Verlag.
- Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley & Sons.
- Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teil 1.
- Marsden, Tromba, *Vektoranalysis*, Spektrum Verlag.
- Boyce, DiPrima, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
1 Matrizen	1
1.1 Rechenregeln für Matrizen	3
1.1.1 Addition und Subtraktion von Matrizen	3
1.1.2 Multiplikation von Matrizen	4
1.2 Die Determinante einer Matrix	5
1.2.1 Eigenschaften von Determinanten	6
1.3 Die inverse Matrix	7
1.4 Eigenwerte und Eigenvektoren	8
1.4.1 Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren	9
2 Koordinatensysteme und Vektortransformationen	13
2.1 Basis und Koordinatensystem	13
2.2 Häufig verwendete Koordinatensysteme	15
2.2.1 Polarkoordinaten	15
2.2.2 Zylinderkoordinaten	21
2.2.3 Kugelkoordinaten	23
2.3 Aktive und passive Transformationen	25
2.3.1 Drehung eines Vektors (aktive Transformation)	25
2.3.2 Drehung des Koordinatensystems (passive Transformation)	27
2.3.3 Eigenschaften von Drehmatrizen	28
2.3.4 Drehungen in drei Dimensionen	28
2.3.5 Allgemeine Drehungen	30
2.3.6 Spiegelung	35
2.3.7 Inversion	36
3 Vektoranalysis: Differentialrechnung	37
3.1 Differentialrechnung mit mehreren Variablen	40
3.2 Bahnkurven	42
3.3 Gradient, Divergenz, Rotation in kartesischen Koordinaten	44
3.3.1 Gradient	44
3.3.2 Divergenz und Rotation	48
3.3.3 Quellenfreie und wirbelfreie Vektorfelder	50
3.3.4 Laplaceoperator	51
3.3.5 Rechenregeln	52

3.4	Gradient, Divergenz, Rotation in anderen Koordinaten	52
3.4.1	Polarkoordinaten	52
3.4.2	Zylinderkoordinaten	55
3.4.3	Kugelkoordinaten	57
3.4.4	Orthogonale, krummlinige Koordinaten in drei Dimensionen	58
4	Vektoranalysis: Integralrechnung	59
4.1	Kurvenintegrale	59
4.2	Flächenintegrale	61
4.2.1	Zwei Dimensionen	61
4.2.2	Drei Dimensionen	61
4.3	Volumenintegrale	65
4.4	Jacobideterminante	65
4.5	Satz von Green	67
4.6	Satz von Stokes	70
4.7	Satz von Gauß	73
5	Fouriertransformation	77
5.1	Fourierreihen	77
5.2	Fourierintegrale	84
5.3	Fouriertransformation	86
6	Gewöhnliche Differentialgleichungen	91
6.1	Differentialgleichungen erster Ordnung	91
6.1.1	Separierbare Differentialgleichungen	93
6.1.2	Exakte Differentialgleichungen	95
6.1.3	Lineare Differentialgleichungen	99
6.1.4	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	101
6.2	Differentialgleichungen zweiter Ordnung	102
6.2.1	Homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . .	104
6.2.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	109
6.2.3	Inhomogene Differentialgleichungen	109
6.3	Differentialgleichungssysteme	113
6.3.1	Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	116
6.3.2	Inhomogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	118
6.4	Ausblick	119

1 Matrizen

Ein rechteckiges Schema von $m \cdot n$ Objekten a_{ij} in der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

heißt Matrix oder auch $m \times n$ Matrix mit den **Matrixelementen** a_{ij} .

Notation: A oder A_{ij} für gesamte Matrix, $(A)_{ij}$ oder a_{ij} für Element i, j .

- Der erste Index (i) nummeriert die Zeilen, der zweite Index (j) nummeriert die Spalten.
- Die Elemente der Matrix können z. B. Zahlen oder Funktionen sein.
- **Nullmatrix:** $a_{ij} = 0$ für alle i, j .
- **Quadratische Matrix:** $m = n$.
- Spaltenvektoren (Zeilenvektoren) können als Matrizen mit $n = 1$ ($m = 1$) betrachtet werden.
- **Diagonalmatrix:** $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Eine häufige Schreibweise ist

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (1.2)$$

- **Einheitsmatrix:** $a_{ij} = \delta_{ij}$. Beispiel:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \quad (1.3)$$

- Gilt $a_{ij} = a_{ji}$ für alle Elemente einer quadratischen Matrix, spricht man von einer **symmetrischen Matrix**.

Beispiel

Die folgende Matrix ist symmetrisch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Die **transponierte** Matrix A^T zu einer $m \times n$ Matrix A ist gegeben durch

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} = a_{ji} \quad (1.4)$$

bzw.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

und ist eine $n \times m$ Matrix. Sie entsteht aus A durch Vertauschen von Zeilen und Spalten.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Für eine symmetrische Matrix gilt $A^T = A$.
- Existiert eine Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, dann heißt A^{-1} die **inverse Matrix** von A .

Weitere Begriffe:

- Adjungierte Matrix: $A^\dagger \equiv \overline{(A^T)}$ (transponiert und komplex konjugiert)
- Hermitesche oder selbstadjungierte Matrix: $A = A^\dagger$.
- Unitäre Matrix: $AA^\dagger = A^\dagger A = E$. Somit gilt: $A^{-1} = A^\dagger$.
- Orthogonale Matrix: $AA^T = A^T A = E$ (für reelle Matrizen). Somit gilt: $A^{-1} = A^T$.

1.1 Rechenregeln für Matrizen

1.1.1 Addition und Subtraktion von Matrizen

Die Addition und Subtraktion zweier Matrizen werden elementweise definiert:

$$(A \pm B)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad (1.6)$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Addition und Subtraktion werden auf die normale Addition und Subtraktion von reellen oder komplexen Zahlen zurückgeführt.
- Falls A und B nicht die gleiche Anzahl an Spalten *und* Zeilen haben, sind Summe und Differenz nicht definiert.

Für die Multiplikation mit einem Skalar gilt:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (1.7)$$

Beispiel

$$2 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Für allgemeine Linearkombinationen gilt:

$$(\alpha A + \beta B)_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij} \quad (1.8)$$

- Aufgrund der elementweisen Definition gelten für reelle oder komplexe Zahlen a_{ij}, b_{ij} das Assoziativgesetz

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C \quad (1.9)$$

und das Kommutativgesetz

$$A + B = B + A. \quad (1.10)$$

1.1.2 Multiplikation von Matrizen

Im Unterschied zur Addition und Subtraktion stellt die elementweise Multiplikation von Matrizen, also $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$, keine nützliche Operation dar.

Stattdessen definieren wir die Multiplikation zweier Matrizen als

$$(C)_{ij} = c_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} b_{lj} \quad (1.11)$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Anzahl der Spalten von A (hier m) gleich der Anzahl der Zeilen von B sein muss. Wenn A eine $n \times m$ Matrix ist, und B eine $m \times p$ Matrix, dann hat C die Dimension $n \times p$. (Dies ist auch daran erkennbar, dass über m summiert wird.)

Für die Berechnung eines Produktes ist es hilfreich sich klarzumachen, dass c_{ij} formal durch das Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit der j -ten Spalte von B gegeben ist:¹

$$\begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^m a_{il} b_{lj} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist die Multiplikation von Matrizen im Allgemeinen **nicht kommutativ**.

¹Das Skalarprodukt der reellen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ ist definiert als $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = \sum_l a_l b_l$

1.2 Die Determinante einer Matrix

Einer quadratischen Matrix A lässt sich eine Determinante, bezeichnet als $|A|$ oder $\det(A)$ zuordnen. Die Betragsstriche bedeuten nicht, dass die Determinante eine positive Zahl sein muss. Die Determinante erlaubt z. B. Aussagen über die lineare Unabhängigkeit von Vektoren und über die Lösbarkeit von Gleichungssystemen: wenn $|A| \neq 0$, dann ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ universell und eindeutig lösbar.

1×1 Matrizen

$$\det A = |a_{11}| = a_{11} \quad (1.14)$$

2×2 Matrizen

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.15)$$

$n \times n$ Matrizen

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} \dots \pm a_{1n}\Delta_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Die Größen Δ_{ij} sind die **Unterdeterminanten** von A ,

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

und entsprechen der Determinante der Matrix welche sich durch Streichen der Zeile i und Spalte j in A ergibt. Somit kann die Berechnung der Determinante für eine $n \times n$ Matrix schrittweise auf die Berechnung von 1×1 Determinanten reduziert werden.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \implies \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 5 \cdot 2 = -19$$

1.2. Die Determinante einer Matrix

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}_{\Delta_{11}} - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}_{\Delta_{12}} + (-2) \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}_{\Delta_{13}} \\ = 3 \cdot [2 \cdot 5 - 0 \cdot (-2)] - 1 \cdot [4 \cdot 5 - 0 \cdot (-1)] - 2 \cdot [4 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1)] = 22$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Gleichung (1.16) ist ein Spezialfall des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Dieser Satz besagt, dass

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad (1.18)$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} \Delta_{jk} \quad (1.19)$$

Die erste Zeile entspricht der Entwicklung nach Zeile i der Matrix A [für $i = 1$ erhalten wir genau Gl. (1.16)], die zweite Zeile der Entwicklung nach Spalte k . Jede Wahl von i oder k liefert dasselbe Resultat für $|A|$.

1.2.1 Eigenschaften von Determinanten

- Eine Determinante $|A|$ ist homogen in Bezug auf die Elemente einer Spalte oder Zeile. D.h. multipliziert man eine Zeile oder Spalte mit einer Zahl λ , so gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda |A| \quad (1.20)$$

Werden alle n Zeilen mit der Zahl λ multipliziert, ergibt sich

$$|\lambda A| = \lambda^n |A| \quad (1.21)$$

- Die Vertauschung zweier Spalten oder Zeilen ändert das Vorzeichen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.22)$$

- $|A^T| = |A|$
- Eine Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Zeile oder Spalte das Vielfache einer anderen Zeile oder Spalte hinzu addiert wird:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{i1} & \dots & a_{1n} + \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.23)$$

Diese Eigenschaft ist wichtig beim Lösen von Gleichungssystemen.

- Sind zwei Zeilen oder Spalten nicht linear unabhängig (z. B. Vielfache voneinander), dann gilt $|A| = 0$.
- $\det AB = \det A \det B$
- $\det E = 1$
- Das Kreuzprodukt zweier Vektoren lässt sich mit Hilfe der Determinante schreiben:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

1.3 Die inverse Matrix

Die inverse Matrix A^{-1} hat die Eigenschaft

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \quad (1.25)$$

Ihre Elemente sind gegeben durch

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{|A|} (-1)^{i+j} \Delta_{ji} \quad (1.26)$$

1.4. Eigenwerte und Eigenvektoren

oder in Matrixform

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \quad (1.27)$$

Die Matrix $\text{adj}(A)$ heißt **Adjunkte** oder auch **Komplementärmatrix**. Offensichtlich existiert sie nur, wenn $|A| \neq 0$. Natürlich kann man die Elemente von A^{-1} auch durch das Lösen des Gleichungssystems $A^{-1}A = E$ bestimmen.

Beispiel

Wir kennen schon

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = E$$

Offensichtlich gilt $B = A^{-1}$. Mit $|A| = 1$ erhalten wir aus Gleichung (1.26):

$$\begin{aligned} (A^{-1})_{11} &= (-1)^{1+1} \Delta_{11} = (-1)^2 \cdot 2 = 2 \\ (A^{-1})_{12} &= (-1)^{1+2} \Delta_{21} = (-1)^3 \cdot (-3) = 3 \\ (A^{-1})_{21} &= (-1)^{2+1} \Delta_{12} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1 \\ (A^{-1})_{22} &= (-1)^{2+2} \Delta_{22} = (-1)^4 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

Für eine allgemeine 2×2 Matrix erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

1.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Im Allgemeinen liefert die Multiplikation eines Vektors $\vec{x}$ mit einer Matrix A einen von $\vec{x}$ verschiedenen Vektor. Vektoren die durch die Multiplikation abgesehen von einem für alle Komponenten gleichen Faktor erhalten bleiben,

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (1.29)$$

haben eine besondere Bedeutung und heißen **Eigenvektoren**; die Zahlen λ heißen **Eigenwerte**, und die Gesamtheit aller Eigenwerte heißt das **Spektrum** von A .

Beispiel

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat also die Eigenwerte λ_1 und λ_2 , und die Eigenvektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Entsprechend hat die Einheitsmatrix E_2 den Eigenwert 1 für alle Vektoren $\vec{x}$.

Anwendungsgebiete:

- Eigenwerte und Eigenvektoren spielen eine zentrale Rolle in der Quantenmechanik. Die Schrödingergleichung kann in vielen Fällen in die Form (1.29) gebracht werden. Die Eigenwerte entsprechen z. B. beim Wasserstoffatom den erlaubten Energien.
- Das Trägheitsmoment von beliebig geformten Körpern wird durch eine 3×3 Matrix (Trägheitstensor) beschrieben, und taucht in der Gleichung für den Drehimpuls auf: $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von I liefert die Drehachsen mit dem kleinsten und größten Trägheitsmoment (Hauptachsen).

1.4.1 Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwertgleichung

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (1.30)$$

kann auch in der Form

$$(A - \lambda E)\vec{x} = 0 \quad (1.31)$$

geschrieben werden.

Wenn die Inverse $(A - \lambda E)^{-1}$ existiert, gilt

$$(A - \lambda E)^{-1}(A - \lambda E)\vec{x} = E\vec{x} = 0 \quad (1.32)$$

was nur die triviale Lösung $\vec{x} = 0$ erlaubt.

Nichttriviale Lösungen erfordern also, dass $(A - \lambda E)$ nicht invertierbar ist, also

$$\boxed{|A - \lambda E| = 0} \quad (1.33)$$

Gleichung (1.33) stellt eine Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte und Eigenvektoren dar. Die Definition der Determinante führt auf das **charakteristische Polynom**:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = P_n(\lambda) = 0 \quad (1.34)$$

1.4. Eigenwerte und Eigenvektoren

Die n Nullstellen des Polynoms der Ordnung n , $P_n(\lambda)$, sind genau die Eigenwerte der Matrix A . Die Existenz von n Nullstellen sichert der Fundamentalsatz der Algebra. Die Eigenwerte müssen nicht reell sein, und können zudem mehrfach auftreten (**Entartung**).

- Die Eigenwerte einer komplexen, selbstadjungierten Matrix ($A = A^\dagger$) bzw. einer reellen symmetrischen Matrix ($A = A^T$) sind reell. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
- Die Eigenwerte einer unitären Matrix ($AA^\dagger = E$) liegen auf dem Einheitskreis, und haben demnach die Form $\lambda = e^{i\phi}$.
- Komplexe Eigenwerte treten stets in Paaren λ, λ^* auf.

Beispiel

Wir betrachten die (selbstadjungierte bzw. symmetrische) Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

zu

$$\lambda = \pm 1$$

Die Eigenvektoren bestimmen wir durch Lösung von

$$(A - \lambda E)\vec{x} = 0$$
$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x_1 + x_2 \\ x_1 - \lambda x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Der Fall $\lambda = +1$ liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

und somit $x_1 = x_2$. Wir wählen einen normierten Eigenvektor

$$\vec{x}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Eigenwert $\lambda = -1$ haben wir

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

und somit $x_1 = -x_2$. Eine mögliche Wahl ist

$$\vec{x}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die beiden Eigenvektoren sind orthogonal,

$$\vec{x}^{(1)} \cdot \vec{x}^{(2)} = 0$$

und bilden somit eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^2$.

Wenn die Eigenvektoren orthogonal sind, erlauben sie eine Diagonaldarstellung der ursprünglichen Matrix A . Zu diesem Zweck schreiben wir die Eigenvektoren als die Spalten einer $n \times n$ Matrix:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Dann gilt wegen $A\vec{x}^{(i)} = \lambda_i \vec{x}^{(i)}$ für die l te Spalte der Matrix AX auch

$$(AX)_{il} = \sum_m A_{im} X_{ml} = \sum_m A_{im} x_m^{(l)} = \lambda_l x_i^{(l)} \quad (1.36)$$

und somit

$$A \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1^{(1)} & \cdots & \lambda_n x_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n x_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

Andererseits sind die Matrixelemente der Matrix $X^T X$ gegeben durch

$$(X^T X)_{ij} = \sum_k (X^T)_{ik} (X)_{kj} = \sum_k x_k^{(i)} x_k^{(j)} = \vec{x}^{(i)} \cdot \vec{x}^{(j)} = \delta_{ij} \quad (1.38)$$

sodass $X^T X = E$ und folglich $X^T = X^{-1}$ gilt.

Die Kombination dieser Ergebnisse liefert

$$\begin{aligned} (X^{-1} A X)_{ij} &= (X^T A X)_{ij} = \sum_k (X^T)_{ik} (A X)_{kj} \\ &= \sum_k x_k^{(i)} \lambda_j x_k^{(j)} \\ &= \lambda_j \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.39)$$

und somit

$$\boxed{X^{-1} A X = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \quad (1.40)$$

1.4. Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Matrix X liefert also mittels der Transformation $A \mapsto X^{-1}AX$ eine Diagonaldarstellung von A . Letztere hat die Eigenwerte als Diagonalelemente.

Beispiel

Wir überprüfen die obige Behauptung anhand des Beispiels der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Matrix der Eigenvektoren

$$X = X^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir finden

$$X^{-1}AX = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese Transformation der Matrix A entspricht einem Basiswechsel in die Basis die durch die Eigenvektoren aufgespannt wird. Das Auffinden einer Transformation in eine diagonale Basis (d.h., die Lösung des Eigenwertproblems) spielt eine zentrale Rolle in der Physik. Basiswechsel bzw. Koordinatentransformationen von Vektoren behandeln wir im nächsten Kapitel.

- Eine $n \times n$ Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n unabhängige Eigenvektoren besitzt.

2 Koordinatensysteme und Vektortransformationen

Vektoren dienen zur Beschreibung von physikalischen Größen mit einem Betrag und einer Richtung (z. B. Geschwindigkeit, Magnetfeld). Insbesondere lassen sich viele physikalische Gesetze mit Hilfe von Vektoren in einer universellen Form schreiben. Z. B. gilt das zweite Newtonsche Gesetz

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.

Hier beschäftigen wir uns mit

- Der Darstellung von Vektoren in verschiedenen Koordinatensystemen.
- Transformationen von Vektoren wie z. B. Rotationen, aber auch zwischen verschiedenen Koordinatensystemen.

2.1 Basis und Koordinatensystem

Als Basis eines n -dimensionalen Vektorraumes (z. B. $\mathbb{R}^3$) bezeichnet man eine Menge von Vektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Anzahl der Vektoren ist gleich der Dimension des Vektorraums.
- Die Vektoren sind linear unabhängig:

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \quad (2.2)$$

Es ist also nicht möglich, einen der Vektoren als eine Linearkombination der anderen Vektoren zu schreiben.

- Wir verwenden die Notation $\hat{e}_i$ für Basisvektoren mit Länge 1.

Beispiel

Kartesische Koordinaten in zwei Dimensionen: die Gleichung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

2.1. Basis und Koordinatensystem

hat nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Hingegen gilt

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

sodass die beiden Vektoren nicht linear unabhängig sind.

Ein einfacher Test ist die Determinante der Basisvektoren:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Wenn sie verschwindet, sind die Vektoren nicht unabhängig.

- Mit Hilfe einer Basis kann jeder Vektor durch n Zahlen dargestellt werden:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \hat{e}_i \quad (2.3)$$

Die Abbildung, die jedem Vektor seine Komponenten v_i zuordnet nennt man auch Koordinatensystem.

- Die Größen v_i (genannt Komponenten oder auch Koordinaten) definieren die Darstellung von $\vec{v}$ im Koordinatensystem der $\hat{e}_i$, und erlauben die Schreibweise

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

- Besonders nützlich sind orthonormale Basisvektoren:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.5)$$

Die Basisvektoren sind paarweise orthogonal, und haben die Länge 1.

Insbesondere gilt in diesem Fall

$$v_i = \vec{v} \cdot \hat{e}_i \quad (2.6)$$

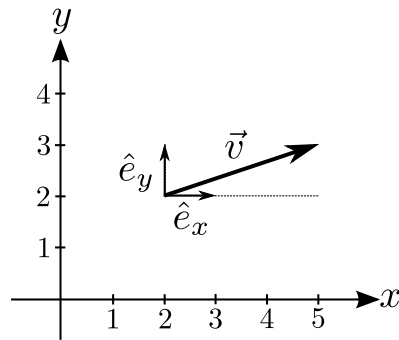
Die Komponente v_i entspricht also der Länge der Projektion von $\vec{v}$ in Richtung von $\hat{e}_i$ (für das Skalarprodukt gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$).

Beispiel

Kartesische Koordinaten in zwei Dimensionen

$$\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$



Der Vektor $\vec{v} = 3\hat{e}_x + \hat{e}_y$ hat die Komponenten

$$v_1 = v_x = \vec{v} \cdot \hat{e}_x = (3\hat{e}_x + \hat{e}_y) \cdot \hat{e}_x = 3$$

$$v_2 = v_y = \vec{v} \cdot \hat{e}_y = (3\hat{e}_x + \hat{e}_y) \cdot \hat{e}_y = 1$$

und demnach die Darstellung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Häufig verwendete Koordinatensysteme

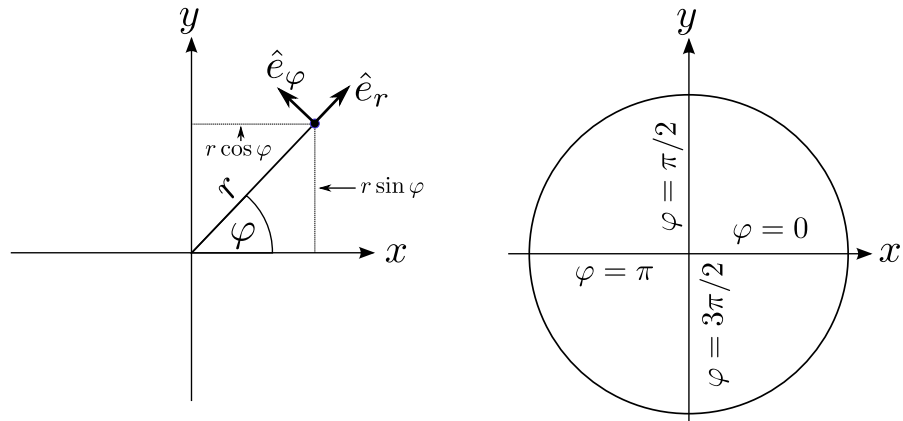
2.2.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten sind ein einfaches Beispiel für sogenannte krummlinige Koordinatensysteme, an dem sich viele der Konzepte gut verstehen lassen. Statt mit den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2) oder auch (x, y) wird ein Punkt in der Ebene durch die Polarkoordinaten r und φ beschrieben.

Es gilt

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2. Häufig verwendete Koordinatensysteme



wobei der Radius r und der Winkel φ die Werte

$$\begin{aligned} r &\geq 0 \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \quad (2.8)$$

annehmen. Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & y < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Fallunterscheidung wird notwendig weil $0 \leq \arccos(x) \leq \pi$.

Polarkoordinaten werden auch für komplexe Zahlen verwendet:

$$z = a + ib = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \underbrace{|z| \cos \varphi}_x + i \underbrace{|z| \sin \varphi}_y \quad (2.10)$$

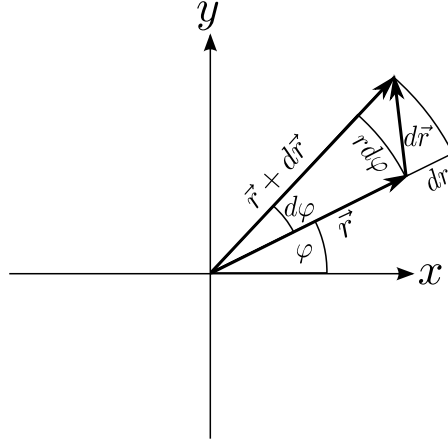
Die Basisvektoren in Polarkoordinaten sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \hat{e}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

- $\hat{e}_r$ und $\hat{e}_\varphi$ sind orthonormal: $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$.
- Die Basisvektoren ändern sich als Funktion von φ !

Geometrische Herleitung der Basisvektoren:

Um zu verstehen, wie man die Basisvektoren in nichtkartesischen Koordinaten bestimmen kann, betrachten wir die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{r} + d\vec{r}$, mit Polarkoordinaten (r, φ) und $(r + dr, \varphi + d\varphi)$:



Einerseits folgt aus der Abbildung:

$$d\vec{r} = dr\hat{e}_r + r d\varphi\hat{e}_\varphi \quad (2.12)$$

Andererseits haben wir für das totale Differential:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi \quad (2.13)$$

Für den Vektor $\vec{r}$ gilt in kartesischen Koordinaten

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y = r \cos \varphi \hat{e}_x + r \sin \varphi \hat{e}_y \quad (2.14)$$

und somit

$$d\vec{r} = \underbrace{(\cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y)}_{\partial \vec{r} / \partial r} dr + \underbrace{(-\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y) r}_{\partial \vec{r} / \partial \varphi} d\varphi \quad (2.15)$$

Der Vergleich mit Gleichung (2.12) liefert dann

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y \\ \hat{e}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y \end{aligned} \quad (2.16)$$

Allgemeine Herleitung der Basisvektoren:

Die Basisvektoren zeigen in Richtung der Änderung eines Vektors wenn wir nur eine Variable (r oder φ) ändern. Eine allgemeine Formel zur Berechnung ist demnach:

$$\hat{e}_\alpha = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right|} \quad (2.17)$$

2.2. Häufig verwendete Koordinatensysteme

Während $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right|$ in kartesischen Koordinatensystemen immer Eins ist, muss das in anderen Koordinaten nicht der Fall sein.

Beispiel

In Polarkoordinaten haben wir

$$\hat{e}_r = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|}$$

Wir erhalten

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (\underbrace{r \cos \varphi}_x \hat{e}_x + \underbrace{r \sin \varphi}_y \hat{e}_y) = \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y$$

Weil $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$ bekommen wir

$$\hat{e}_r = \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y$$

Für den anderen Basisvektor ergibt sich

$$\hat{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\underbrace{r \cos \varphi}_x \hat{e}_x + \underbrace{r \sin \varphi}_y \hat{e}_y) = r(-\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y)$$

Weil $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r$ bekommen wir

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y$$

Diese Methode zur Bestimmung der Basisvektoren lässt sich auch auf die im Folgenden diskutierten Zylinder- und Kugelkoordinaten, sowie für allgemeine krummlinige Systeme anwenden.

Transformation von Vektoren

Mit Hilfe von $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi$ lassen sich Vektoren in der Form

$$\vec{v} = v_r \hat{e}_r + v_\varphi \hat{e}_\varphi \tag{2.18}$$

darstellen.

Die Komponenten v_r und v_φ bestimmen wir aus Skalarprodukten:

$$\begin{aligned} v_r &= \vec{v} \cdot \hat{e}_r \\ &= (v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y) \cdot (\cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y) \\ &= v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
 v_\varphi &= \vec{v} \cdot \hat{e}_\varphi \\
 &= (v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y) \cdot (-\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y) \\
 &= -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Diese Gleichungen lassen sich auch als Matrix-Vektor Multiplikation schreiben:

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Der Vektor $\vec{v}$ bleibt geometrisch unverändert, die Transformation beschreibt die Änderung der Komponenten durch den Wechsel in die Basis $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi\}$.

Allgemein können Koordinatentransformationen durch Matrizen beschrieben werden. Es stellt sich heraus, dass die Transformation von einem orthogonalen Koordinatensystem K mit Basisvektoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ in ein orthogonales Koordinatensystem K' mit Basisvektoren $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2$ durch die Matrix $T(K \mapsto K')$ beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 \end{pmatrix}}_{T(K \mapsto K')} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

- Die Elemente der ersten Spalte der Transformationsmatrix entsprechen der Darstellung des Vektors $\hat{e}_1$ im Koordinatensystem K' . Die Elemente der zweiten Spalte entsprechen der Darstellung des Vektors $\hat{e}_2$ im Koordinatensystem K' .
- Da für einen beliebigen Vektor gilt, dass

$$\vec{v} = \sum_i v_i \hat{e}_i = \sum_i v'_i \hat{e}'_i, \tag{2.23}$$

ist die Transformation von K nach K' durch die Transformation der Basisvektoren, und damit durch die Matrix T , vollständig bestimmt.

Wegen $\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j = \cos \theta_{ij}$ gilt, entsprechen die Matrixelemente den Kosinussen der Winkel zwischen je zwei Basisvektoren.

- Die umgekehrte Transformation wird durch

$$T(K' \mapsto K) = \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_1 & \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_1 \\ \hat{e}'_1 \cdot \hat{e}_2 & \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

beschrieben. Offensichtlich gilt $T(K' \mapsto K) = T(K \mapsto K')^T$. Da die Hin- und Rücktransformation inverse Operationen sind, haben wir

$$T(K \mapsto K') T(K' \mapsto K) = E \implies T(K' \mapsto K) = [T(K \mapsto K')]^T = [T(K \mapsto K')]^{-1} \tag{2.25}$$

2.2. Häufig verwendete Koordinatensysteme

Die Matrix T ist also orthogonal, sodass Längen und Winkel erhalten bleiben:

$$\begin{aligned} |\vec{v}'|^2 &= |T\vec{v}|^2 = (T\vec{v})^T(T\vec{v}) = \vec{v}^T T^T T \vec{v} = \vec{v}^T \vec{v} = |\vec{v}|^2, \\ \vec{v}' \cdot \vec{w}' &= (T\vec{v})^T(T\vec{w}) = \vec{v}^T T^T T \vec{w} = \vec{v}^T \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

- Eine entsprechende 3×3 Matrix beschreibt Transformationen in drei Dimensionen:

$$T(K \mapsto K') = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_1 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_2 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_3 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_3 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_3 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

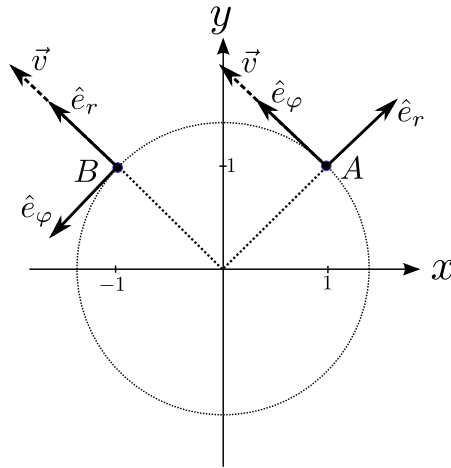
Beispiel

Ortsvektoren haben in Polarkoordinaten eine besonders einfache Darstellung:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r \hat{e}_r$$

Beispiel

Wir betrachten den Richtungsvektor mit der kartesischen Darstellung $\vec{v} = (v_x, v_y) = (-1, 1)$, an zwei verschiedenen Punkten $A = (1, 1)$ und $B = (-1, 1)$.



Am Punkt A ist $\varphi = \pi/4$,¹ $\sin \varphi = \cos \varphi = 1/\sqrt{2}$, und somit

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \hat{e}_\varphi$$

Am Punkt B haben wir $\varphi = 3\pi/4$, $\sin \varphi = -\cos \varphi = 1/\sqrt{2}$ und

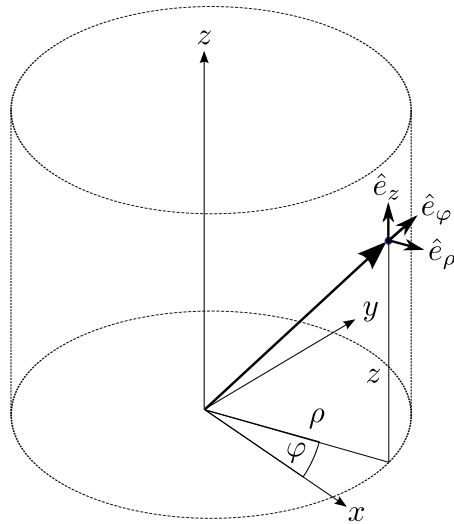
$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \hat{e}_r$$

¹Der Fall von Richtungsvektoren macht klar, dass der Polarwinkel φ im Allgemeinen nicht durch den Vektor $\vec{v}$ bestimmt wird, sondern durch den Punkt an dem die Darstellung erfolgen soll.

Durch die Abhängigkeit der Basisvektoren von φ hat $\vec{v}$ also unterschiedliche Darstellungen. Am Punkt A ist $\vec{v}$ ein Tangentenvektor ($\sim \hat{e}_\varphi$), am Punkt B hingegen ein radialer Vektor ($\sim \hat{e}_r$). Dagegen sind die kartesischen Komponenten an jedem Punkt gleich.

2.2.2 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten sind eine Erweiterung der Polarkoordinaten auf drei Dimensionen. Die zusätzliche Koordinate ist einfach die kartesische z Koordinate. Ein beliebiger Punkt auf dem Zylinder mit Radius ρ kann demnach durch das Tripel (ρ, φ, z) beschrieben werden. Zylinderkoordinaten sind hilfreich für Fragestellungen die eine Symmetrie um die z -Achse aufweisen, z. B. die Berechnung des Magnetfeldes um einen Leiter.



Es gilt:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \tag{2.27}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \arccos \frac{x}{\rho} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\rho} & y < 0 \end{cases} \\ z &= z \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.2. Häufig verwendete Koordinatensysteme

mit den Wertebereichen

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty. \quad (2.29)$$

Die Verwendung von ρ statt r hat den Grund, dass ρ die Länge der Projektion in die xy -Ebene ist, während r die Länge des Vektors $\vec{r} = (\rho, \varphi, z)$ bezeichnet. Es gilt:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \quad (2.30)$$

Die Basisvektoren sind

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho &= \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{e}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{e}_z &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Somit ist $\hat{e}_z$ konstant, während sich $\hat{e}_\rho$ und $\hat{e}_\varphi$ so wie in Polarkoordinaten mit φ ändern.

Für Ortsvektoren gilt

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \quad (2.32)$$

Allgemeine Vektoren werden wie folgt dargestellt:

$$\vec{v} = v_\rho \hat{e}_\rho + v_\varphi \hat{e}_\varphi + v_z \hat{e}_z \quad (2.33)$$

Ausgehend von den kartesischen Komponenten (v_x, v_y, v_z) erhalten wir aus den Skalarprodukten $\vec{v} \cdot \hat{e}_\alpha$ folgende Komponenten in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} v_\rho &= \cos \varphi v_x + \sin \varphi v_y \\ v_\varphi &= -\sin \varphi v_x + \cos \varphi v_y \\ v_z &= v_z \end{aligned} \quad (2.34)$$

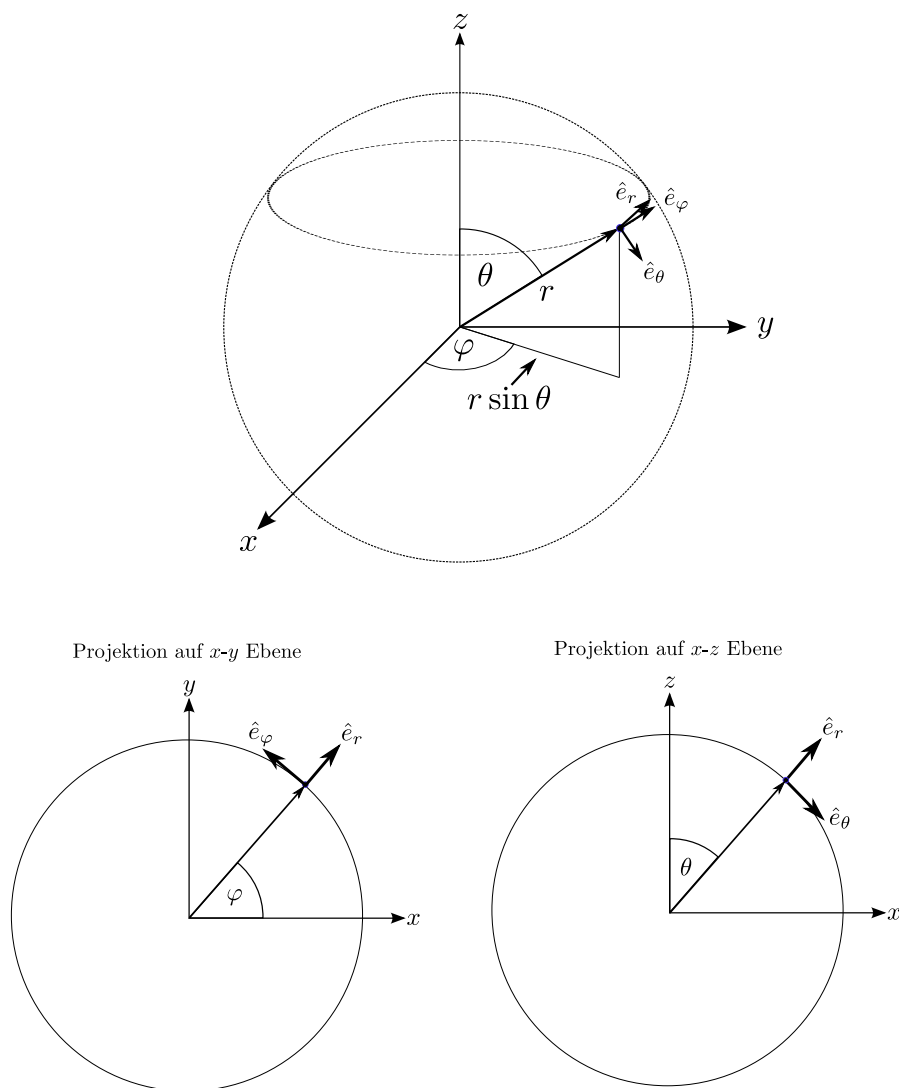
oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} v_\rho \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_x & \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_y & \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z \\ \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_x & \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_y & \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_z \\ \hat{e}_z \cdot \hat{e}_x & \hat{e}_z \cdot \hat{e}_y & \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

2.2.3 Kugelkoordinaten

Für Fragestellungen mit sphärischer Symmetrie empfiehlt sich die Verwendung der Kugelkoordinaten (r, θ, φ) . In diesem Zusammenhang nennt man θ den Polarwinkel, und φ den Azimutwinkel.



Der Zusammenhang zwischen kartesischen und sphärischen Koordinaten ergibt sich mit Hilfe der trigonometrischen Formeln als: ($r \sin \theta$ ist die projizierte Länge in der xy -Ebene)

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.2. Häufig verwendete Koordinatensysteme

mit den Wertebereichen

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi < \pi \quad (2.38)$$

Umgekehrt haben wir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.39)$$

$$\varphi = \text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0, \\ \text{Sgn}(y) \frac{\pi}{2} & x = 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0 \text{ and } y \geq 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0 \text{ and } y < 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} \quad (2.41)$$

Die Basisvektoren sind gegeben durch die kartesische Darstellung

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ \hat{e}_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ \hat{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.42)$$

und bilden wiederum ein Orthonormalsystem.

Der Ortsvektor eines Punktes mit Abstand r vom Ursprung ist einfach gegeben durch

$$\vec{r} = r \hat{e}_r \quad (2.43)$$

Allgemeine Vektoren werden als

$$\vec{v} = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta + v_\varphi \hat{e}_\varphi \quad (2.44)$$

dargestellt, und die Transformation zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten wird beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

2.3 Aktive und passive Transformationen

- Wie wir am Beispiel der Transformation zwischen kartesischen und Polarkoordinaten gesehen haben, entspricht die Multiplikation eines Vektors mit einer geeigneten Matrix einer Transformation des Vektors. Sie kann deshalb als eine Abbildung $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ interpretiert werden.
- Nun wollen wir uns mit allgemeineren Transformationen beschäftigen, z. B. mit der Drehung oder Inversion von Vektoren oder Koordinatensystemen.
- Man unterscheidet aktive Transformationen (z. B. Änderung eines Vektors) und passive Transformationen (Änderung der Koordinaten).

Beispiel

Wir betrachten die Wirkung der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

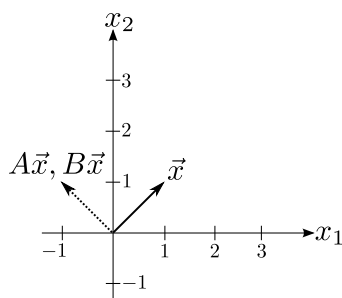
auf den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

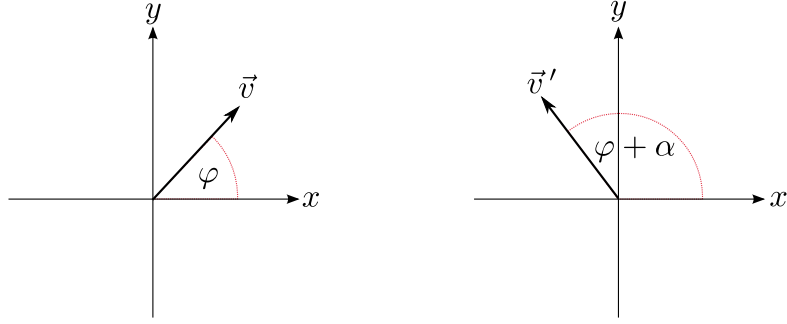
A beschreibt eine Drehung um den Winkel $\varphi = \pi/2$, B beschreibt eine Spiegelung $x_1 \mapsto -x_1$.



2.3.1 Drehung eines Vektors (aktive Transformation)

Wir betrachten die Drehung des Vektors $\vec{v}$ um den Winkel α in zwei Dimensionen:

2.3. Aktive und passive Transformationen



Wie im Falle von Koordinatentransformationen sollen dabei die Länge von Vektoren

$$|\vec{v}'| = |\vec{v}| \quad (2.46)$$

und die Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\vec{v}' \cdot \vec{w}' = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad (2.47)$$

erhalten bleiben (orthogonale Transformation).

In Polarkoordinaten haben wir folgende Darstellung der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{v}'$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \underbrace{r \cos \varphi}_{v_x} \hat{e}_x + \underbrace{r \sin \varphi}_{v_y} \hat{e}_y, \\ \vec{v}' &= r \cos(\varphi + \alpha) \hat{e}_x + r \sin(\varphi + \alpha) \hat{e}_y, \end{aligned}$$

mit $r = |\vec{v}|$. Um v'_x, v'_y durch v_x, v_y auszudrücken verwenden wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (2.48)$$

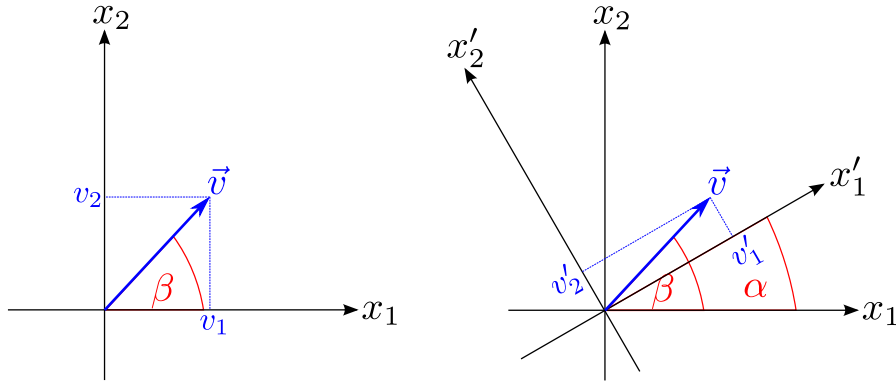
und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \underbrace{(r \cos \varphi \cos \alpha - r \sin \varphi \sin \alpha)}_{v_x} \hat{e}_x + \underbrace{(r \sin \varphi \cos \alpha + r \cos \varphi \sin \alpha)}_{v_y} \hat{e}_y \\ &= (v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha) \hat{e}_x + (v_y \cos \alpha + v_x \sin \alpha) \hat{e}_y. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Die Drehung wird also durch folgende Matrix-Vektor-Multiplikation beschrieben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix}}_{\vec{v}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}_R \underbrace{\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}}_{\vec{v}}. \quad (2.50)$$

Wir bezeichnen Drehmatrizen mit dem Buchstaben R . Im Unterschied zu passiven Koordinatentransformationen ändert sich der Vektor selbst durch die Rotation.



2.3.2 Drehung des Koordinatensystems (passive Transformation)

Wir betrachten nun eine Drehung des Koordinatensystems bei festem Vektor $\vec{v}$. Entsprechend erwarten wir zwei verschiedene Darstellungen in den Koordinatensystemen K mit Achsen x_1, x_2 und K' mit Achsen x'_1, x'_2 :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_K, \quad \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}_{K'} \quad (2.51)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} v_1 &= v \cos \beta \\ v_2 &= v \sin \beta \\ v'_1 &= v \cos(\beta - \alpha) = \underbrace{v \cos \beta \cos \alpha}_{v_1} + \underbrace{v \sin \beta \sin \alpha}_{v_2} \\ v'_2 &= v \sin(\beta - \alpha) = \underbrace{v \sin \beta \cos \alpha}_{v_2} - \underbrace{v \cos \beta \sin \alpha}_{v_1} \end{aligned} \quad (2.52)$$

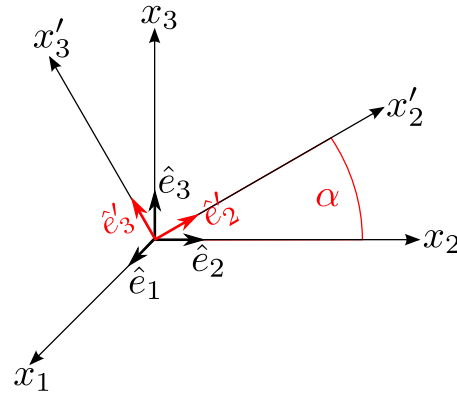
und somit

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 \cos \alpha + v_2 \sin \alpha \\ v'_2 &= -v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.53)$$

bzw. in Matrixform

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}_{K'} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_K \quad (2.54)$$

- Die Drehmatrix unterscheidet sich von jener in Gl. (2.50) durch das Vorzeichen des Winkels α . Die Rotation des Vektors um den Winkel α ist äquivalent (ergibt dieselben Komponenten für $\vec{v}$) zur Rotation der Koordinatenachsen um $-\alpha$.
- Offensichtlich ist die Drehmatrix identisch mit der Transformationsmatrix für Polarkoordinaten wenn wir $\alpha = \varphi = \arccos(x/r)$ wählen. Eine allgemeine Drehung des Koordinatensystems ist natürlich ebenfalls eine Koordinatentransformation.



2.3.3 Eigenschaften von Drehmatrizen

Drehmatrizen haben folgende Eigenschaften:²

- Sie sind quadratische Matrizen.
- Die Matrixelemente sind reell.
- Sie sind orthogonal: $R^T = R^{-1}$.
- Es gilt $|R| = 1$.

2.3.4 Drehungen in drei Dimensionen

Wir verallgemeinern die bisherigen Betrachtungen nun auf den dreidimensionalen Fall. Für (passive) Drehungen des Koordinatensystems um die Koordinatenachsen ergibt sich

$$x_1\text{-Achse bzw. } x\text{-Achse : } R_1(\alpha) = R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$$x_2\text{-Achse bzw. } y\text{-Achse : } R_2(\alpha) = R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

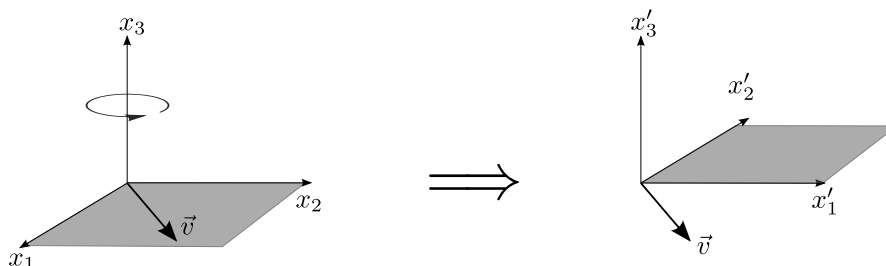
$$x_3\text{-Achse bzw. } z\text{-Achse : } R_3(\alpha) = R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Die Darstellung der Basisvektoren des neuen Koordinatensystems im alten Koordinatensystem sind wieder durch die Zeilen der Transformationsmatrizen gegeben.

²Wir betrachten den im Skript behandelten Fall von *reellen* Drehmatrizen.

Beispiel

Wir betrachten eine Drehung des Koordinatensystems um die z -Achse um den Winkel $\alpha = \pi/2$, und berechnen die Darstellung des Vektors $\vec{v} = (1, 1, 0)$ im gedrehten Koordinatensystem.



Die Drehmatrix ist gegeben durch:

$$R_3(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit dem Vektor ergibt die Komponenten im System K' :

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen außerdem, dass die Zeilen der Matrix R den Komponenten der Einheitsvektoren des Systems K' in der Basis von K entsprechen.

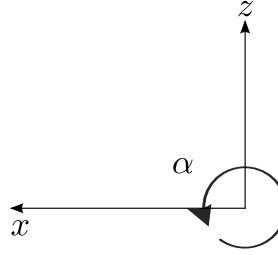
Wenn wir stattdessen den Vektor selbst drehen (aktive Transformation), benötigen wir die Matrix

$$R_3(-\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Drehwinkel ist in drei Dimensionen wie folgt definiert: für die Drehung um die Achse x_i entspricht ein positiver Winkel einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn wenn man entlang der Drehachse Richtung Ursprung blickt (siehe die umseitige Abbildung).



2.3.5 Allgemeine Drehungen

Z.B. bei der Beschreibung der Bewegung eines Kreisels wird es notwendig, beliebige Drehungen zu betrachten. Eine beliebige Drehung des Koordinatensystems (bei der der Ursprung fest bleibt) kann man als Produkt von drei Drehungen schreiben:

$$\begin{aligned}
 R &= R_1(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma) \\
 &= R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Hier ist wichtig, dass sich die Koordinatenachsen bei passiven Transformationen im Allgemeinen in jedem Schritt ändern. In diesem Fall schreibt man entsprechend auch $R_{1''}(\alpha)R_{2'}(\beta)R_3(\gamma)$ bzw. $R_{x''}(\alpha)R_{y'}(\beta)R_z(\gamma)$. Ausgehend von x, y, z (bzw. x_1, x_2, x_3) liefert die erste Drehung $[R_z(\gamma)]$ neue Achsen x', y', z' (mit $z' = z$ weil z der Drehachse entspricht). Die zweite Drehung $[R_{y'}(\beta)]$ hat als Drehachse die y' -Achse, und ergibt das Koordinatensystem mit den Achsen x'', y'', z'' (mit $y'' = y'$) bzw. x_1'', x_2'', x_3'' . Die dritte Drehung $[R_{x''}(\alpha)]$ erfolgt um die aktuelle x -Achse x'' und liefert x''', y''', z''' mit $x''' = x''$.

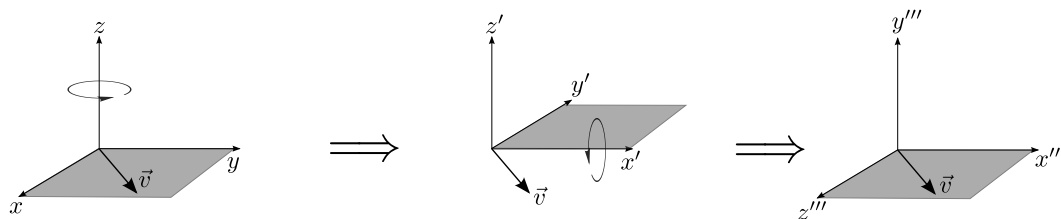
Etwas einfacher ist der Fall einer aktiven Transformation mit Winkeln α, β, γ und beschrieben durch $R_x(-\alpha)R_y(-\beta)R_z(-\gamma)$, weil dort die Koordinatenachsen fest bleiben und sich nur der zu drehende Vektor ändert.

Beispiel

Wir drehen das Koordinatensystem zunächst um den Winkel $\gamma = \pi/2$ um die z -Achse, und dann um den Winkel $\alpha = \pi/2$ um die x'' -Achse. Der Winkel β ist Null.

Daher gilt

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= 1, & \cos \alpha &= 0 \\
 \sin \beta &= 0, & \cos \beta &= 1 \\
 \sin \gamma &= 1, & \cos \gamma &= 0
 \end{aligned}$$



Die entsprechende Drehmatrix ist

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

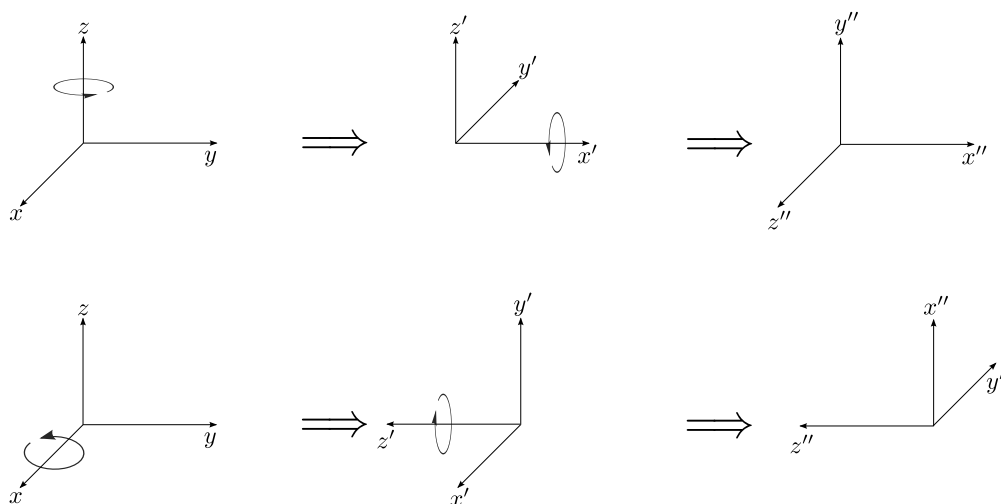
was auch das Ergebnis der folgenden Matrixmultiplikation ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{R_1(\pi/2)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_2(0)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_3(\pi/2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{v} = (1, 1, 0)$ im ursprünglichen Koordinatensystem ergibt sich als

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

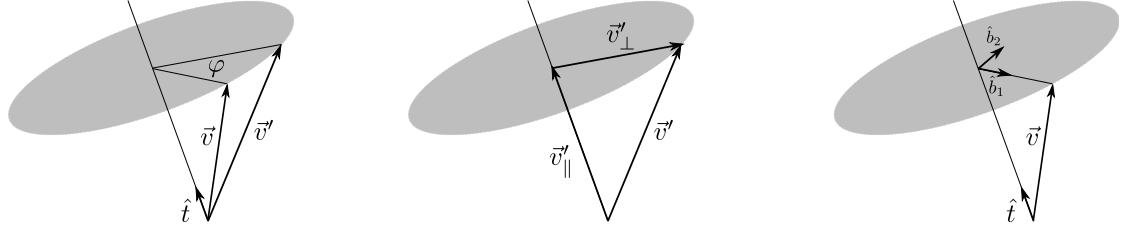
Drehungen in drei Dimensionen sind im Allgemeinen nicht vertauschbar, es sei denn es wird immer um dieselbe Achse gedreht. Der letztere Fall beinhaltet Drehungen in der xy -Ebene um die z -Achse, also alle Drehungen in zwei Dimensionen.



2.3. Aktive und passive Transformationen

Das Eulersche Theorem besagt dass wenn ein Punkt (z. B. der Ursprung) fixiert bleibt, drei aufeinander folgende Drehungen um die Koordinatenachsen auch durch eine Drehung um eine raumfeste Drehachse durch den fixen Punkt beschrieben werden können. Statt der Winkel α, β, γ sind die freien Parameter dann durch den Drehwinkel und zwei Komponenten des Drehachsenvektors gegeben (die Länge dieses Vektors ist irrelevant).

Im Folgenden betrachten wir die Drehung eines Vektors (statt der Drehung des Koordinatensystems). Wir drehen den Vektor $\vec{v}$ um den Winkel φ um die Achse mit dem Einheitsvektor $\hat{t}$. Der resultierende Vektor sei $\vec{v}' = R\vec{v}$, mit einer Drehmatrix R .



Der gedrehte Vektor $\vec{v}'$ kann in seine Komponenten parallel bzw. normal zur Drehachse zerlegt werden:

$$\vec{v}' = \vec{v}'_{\parallel} + \vec{v}'_{\perp} \quad (2.59)$$

Nach der Drehung gilt $\vec{v}'_{\parallel} = \vec{v}_{\parallel}$ und $|\vec{v}'_{\perp}| = |\vec{v}_{\perp}|$. Die Komponente in Richtung der Drehachse ist gegeben durch $\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v} \cdot \hat{t})\hat{t}$. Entsprechend gilt $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{t})\hat{t}$. Die Drehung des Vektors $\vec{v}$ ändert nur die zur Drehachse senkrechte Komponente, und erfolgt in der Ebene die durch die Vektoren

$$\hat{b}_1 = \frac{\vec{v}_{\perp}}{|\vec{v}_{\perp}|} = \frac{\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{t})\hat{t}}{|\vec{v}_{\perp}|} \quad (2.60)$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\hat{t} \times \vec{v}}{|\hat{t} \times \vec{v}|} = \frac{\hat{t} \times \vec{v}}{|\vec{v}| \sin(\hat{t}, \vec{v})} = \frac{\hat{t} \times \vec{v}}{|\vec{v}_{\perp}|} \quad (2.61)$$

aufgespannt wird. Für die Komponente des gedrehten Vektors in dieser Ebene schreiben wir

$$\begin{aligned} \vec{v}'_{\perp} &= \hat{b}_1 |\vec{v}_{\perp}| \cos \varphi + \hat{b}_2 |\vec{v}_{\perp}| \sin \varphi \\ &= \frac{\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{t})\hat{t}}{|\vec{v}_{\perp}|} |\vec{v}_{\perp}| \cos \varphi + \frac{\hat{t} \times \vec{v}}{|\vec{v}_{\perp}|} |\vec{v}_{\perp}| \sin \varphi \\ &= \cos \varphi [\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{t})\hat{t}] + \sin \varphi [\hat{t} \times \vec{v}] \end{aligned} \quad (2.62)$$

Daraus folgt für den gedrehten Vektor $\vec{v}'$:

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \vec{v}'_{\perp} + \vec{v}'_{\parallel} \\ &= \cos \varphi [\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{t})\hat{t}] + \sin \varphi [\hat{t} \times \vec{v}] + (\vec{v} \cdot \hat{t})\hat{t} \\ &= [1 - \cos \varphi] (\vec{v} \cdot \hat{t})\hat{t} + \vec{v} \cos \varphi + \sin \varphi [\hat{t} \times \vec{v}] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Diese Beziehung ist als Formel von Rodrigues bekannt.

Für eine gegebene Drehachse $\hat{t}$ und einen Winkel φ ist es möglich, die Elemente der Drehmatrix R zu berechnen:

$$R_{ij} = (1 - \cos \varphi) t_i t_j + \delta_{ij} \cos \varphi - \sin \varphi \sum_k \epsilon_{ijk} t_k \quad (2.64)$$

wobei t_i die Komponenten des Einheitsvektors $\hat{t}$ der Drehachse sind. Das Levi-Civita Symbol (auch Epsilontensor genannt) ist definiert durch

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ oder } (2, 3, 1), \\ -1 & \text{für } (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1) \text{ oder } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{für } i = j \text{ oder } j = k \text{ oder } k = i \end{cases} \quad (2.65)$$

Für eine gegebene Drehmatrix R ergeben sich der Winkel φ und der Vektor $\vec{t}$ der Drehachse aus

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2} [\text{Tr } R - 1] \\ T &= R + R^T - [\text{Tr } R - 1] E \end{aligned} \quad (2.66)$$

Der Drehachsenvektor ist eine der Zeilen der Matrix T (die Normierung und ein mögliches Vorzeichen ± 1 sind noch zu wählen). Per Konvention wählen wir die Orientierung der Drehachse so, dass positive Winkel einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn entsprechen wenn wir von oben auf die Drehachse sehen.

Die Spur einer Matrix ist definiert als die Summe der Diagonalelemente:

$$\text{Tr } A = \sum_i A_{ii} \quad (2.67)$$

Beispiel

Wir drehen den Vektor $\vec{v} = (1, 1, 1)$ um den Winkel $\varphi = \pi/2$ um die z -Achse (aktive Transformation). Die entsprechende Drehmatrix ist

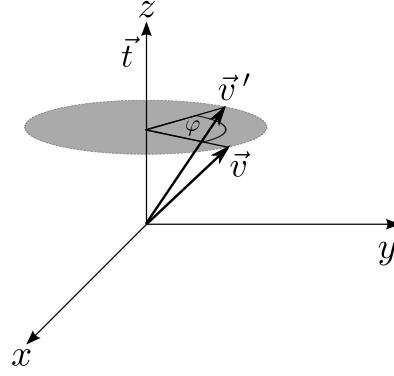
$$R_3(-\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation mit $\vec{v}$ liefert $(-1, 1, 1)$. Die Drehachse ergibt sich aus der Matrix

$$T = R + R^T - [\text{Tr } R - 1] E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die dritte Zeile ist $2\hat{e}_z$. Der Kosinus des Drehwinkels ergibt sich aus

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} [\text{Tr } R - 1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm \pi/2.$$



Aus den geometrisch anschaulichen Eigenschaften

$$R(\hat{t}, \varphi + 2\pi) = R(\hat{t}, \varphi), \quad [R(\hat{t}, \varphi)]^{-1} = R(\hat{t}, -\varphi) = R(-\hat{t}, \varphi)$$

folgt

$$R(\hat{t}, 2\pi - \varphi) = R(-\hat{t}, \varphi).$$

Entsprechend kann der Drehwinkel auf den Bereich $0 \leq \varphi \leq \pi$ eingeschränkt werden.

Die Berechnung der Drehachse kann auch als Eigenwertproblem gesehen werden. Der Vektor der Drehachse erfüllt die Gleichung

$$R\vec{t} = \vec{t} \tag{2.68}$$

und ist daher ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$. Die Komponenten von $\vec{t}$ ergeben sich also aus dem Gleichungssystem

$$(R - \lambda E)\vec{t} = 0, \quad (\lambda = 1) \tag{2.69}$$

Beispiel

Wir berechnen die Drehachse und den Drehwinkel für die Drehmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gleichung (2.69) liefert:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = 0$$

Das entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = 0$$

Wir erhalten daraus

$$-t_1 + t_2 = 0$$

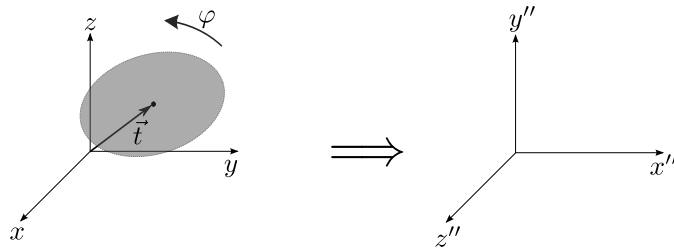
$$-t_2 + t_3 = 0$$

$$t_1 - t_3 = 0$$

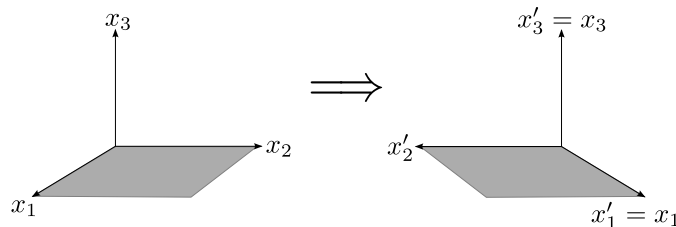
mit der möglichen Lösung $\vec{t} = (1, 1, 1)$.

Der Drehwinkel ergibt sich als

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}[-1] = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^\circ$$



2.3.6 Spiegelung



Die Transformationsmatrix für die Spiegelung ist die Einheitsmatrix mit einer -1 in der Zeile, die der gespiegelten Achse entspricht. Eine Spiegelung an der x_1x_3 -Ebene wird durch folgende Matrix beschrieben:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |S| = -1 \quad (2.70)$$

Hier wird aus dem ursprünglich rechtshändigen ein linkshändiges Koordinatensystem, was durch $|S| = -1$ zum Ausdruck gebracht wird. Hingegen bleibt die Händigkeit unter Transformationen mit $|T| = 1$ erhalten.

2.3. Aktive und passive Transformationen

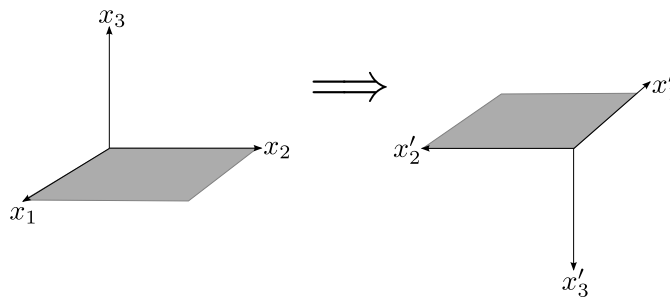
Für das rechtshändige kartesische Koordinatensystem gilt

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \quad (2.71)$$

(Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ erzeugt einen Vektor der normal auf die Ebene steht, welche von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.)

2.3.7 Inversion

Bei der Inversion werden alle Achsen gespiegelt:



Die entsprechende Matrix ist:

$$I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |I| = -1 \quad (2.72)$$

3 Vektoranalysis: Differentialrechnung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Ableitungen von Vektorfeldern, sowie mit vektorwertigen Ableitungen von Skalarfeldern.

Ein Skalarfeld ist eine Funktion

$$f = f(\vec{r}) \quad (3.1)$$

die jedem Ortsvektor $\vec{r} [= (x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten] eine Zahl $f(\vec{r})$ zuordnet. Ein Beispiel für ein Skalarfeld ist die Temperatur in einem Raum.

Unter einem dreidimensionalen Vektorfeld verstehen wir eine vektorwertige Funktion,

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{r}) \\ v_2(\vec{r}) \\ v_3(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

die jedem Ortsvektor $\vec{r}$ einen Vektor $\vec{v}(\vec{r})$ zuordnet. Physikalische Beispiele sind ein Geschwindigkeitsfeld in einem Strömungsproblem oder ein magnetisches Feld.

Eine wichtige Rolle spielen auch Vektoren, die von einem Parameter abhängen, z.B. der zeitabhängige Vektor

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

der den Ort eines bewegten Körpers als Funktion der Zeit in einem kartesischen Koordinatensystem beschreibt. Statt der Zeit t kann z.B. auch die Bogenlänge s zur Parametrisierung einer Bahnkurve verwendet werden.

Transformationen von Feldern

Im vorherigen Kapitel haben wir aktive und passive Transformationen von gegebenen Vektoren behandelt. Eine Besonderheit tritt auf, wenn wir stattdessen Skalarfelder $f(\vec{r})$ oder Vektorfelder $\vec{v}(\vec{r})$ transformieren, was im Folgenden kurz dargestellt werden soll.

Wir betrachten ein Skalarfeld $f(\vec{r})$ und drehen es um den Koordinatenursprung (aktive Transformation). Entsprechend soll der Wert $f(\vec{r})$ des ursprünglichen Feldes vom gedrehten Feld $f'(\vec{r})$ am Punkt $\vec{r}' = R\vec{r}$ angenommen werden, also $f'(\vec{r}') = f'(R\vec{r}) = f(\vec{r})$.

$R = R(\alpha)$ ist eine entsprechende Drehmatrix. Für einen beliebigen Ort $\vec{r}$ gilt:

$$f'(\vec{r}) = f(R^{-1}\vec{r}). \quad (3.4)$$

Offensichtlich ist wie gefordert $f'(R\vec{r}) = f(R^{-1}R\vec{r}) = f(\vec{r})$.

Beispiel

Gegeben sei eine Temperaturverteilung beschrieben durch das Feld $f(\vec{r}) = f(x, y) = xy$. Das Feld soll um $\alpha = -\pi/2 = -90^\circ$ gedreht werden. Entsprechend Gl. (3.4) berechnen wir $R^{-1}\vec{r}$ mit

$$R^{-1}(\alpha) = R^T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \implies R^{-1}(-\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

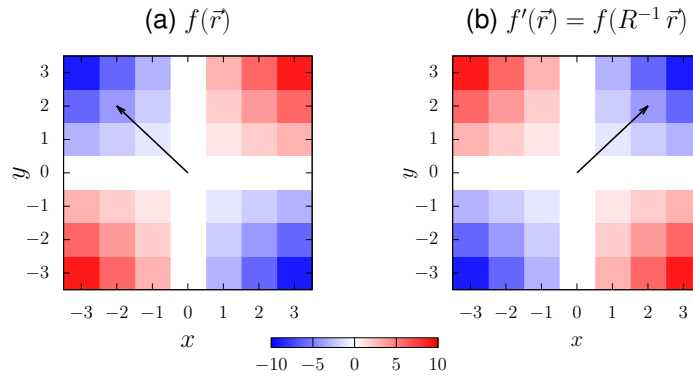
Damit erhalten wir

$$R^{-1}\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

und

$$f'(\vec{r}) = f(R^{-1}\vec{r}) = f(-y, x) = -yx.$$

Die grafische Darstellung bestätigt dass f' die gewünschte Form hat:



Etwas komplizierter ist der Fall eines Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$. Für die Drehung von $\vec{v}(\vec{r})$ gilt

$$\vec{v}'(\vec{r}) = R\vec{v}(R^{-1}\vec{r}). \quad (3.5)$$

Am Punkt $\vec{r}' = R\vec{r}$ haben wir $\vec{v}'(\vec{r}') = \vec{v}'(R\vec{r}) = R\vec{v}(\vec{r})$, also dem Vektor der aus Drehung des Wertes von $\vec{v}$ am ursprünglichen Ort $\vec{r}$ hervorgeht. Das Argument $R^{-1}\vec{r}$ ist identisch zum obigen Fall des Skalarfeldes $f(\vec{r})$. Zusätzlich liefert R die Drehung des Vektors $\vec{v}(R^{-1}\vec{r})$ am jeweiligen Ort.

Beispiel

Wir betrachten die Rotation des Radialfeldes $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{r}$, siehe Abbildung (a) unten. Der Drehwinkel soll wie zuvor $\alpha = -\pi/2$ sein. Zunächst berechnen wir das gedrehte Feld

$$R\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

welches in Abbildung (b) gezeigt ist. Offensichtlich entspricht das Feld $R\vec{v}$ dem Fall in dem an jedem Punkt der Vektor $\vec{v}$ in den Vektor $R\vec{v}$ gedreht wird. Das Resultat ist aber nicht die gewünschte Drehung des Vektorfeldes – ein Radialfeld sollte durch Drehung unverändert bleiben!

Als nächstes berechnen wir das Feld

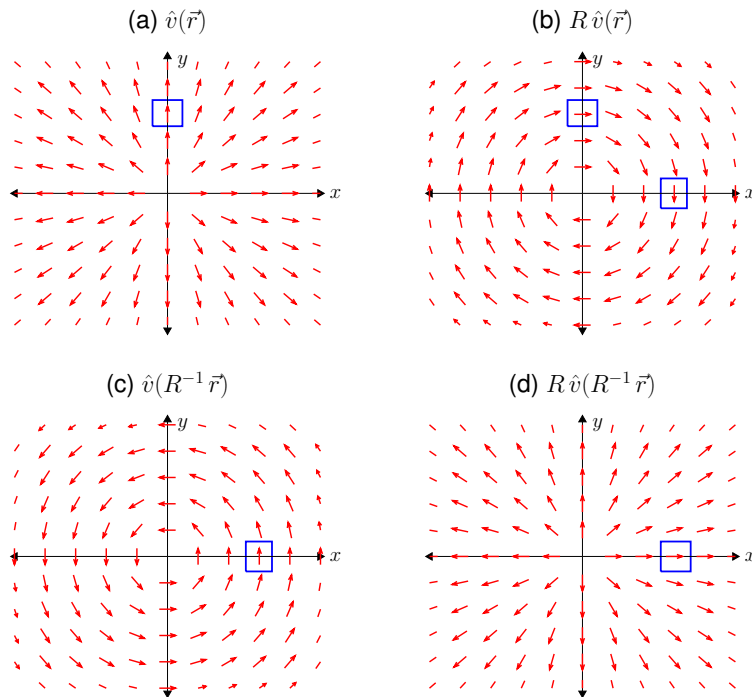
$$\vec{v}(R^{-1}\vec{r}) = R^{-1}\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

welches in Abbildung (c) zu sehen ist. Hier wurde der Vektor $\vec{v}(\vec{r})$ vom Punkt $\vec{r}$ zum Punkt $R\vec{r}$ verschoben, ohne seine Richtung zu ändern.

Zum Schluss verwenden wir Gl. (3.5),

$$R\vec{v}(R^{-1}\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und erhalten die gewünschte Form (radial!) in Abbildung (d).



3.1 Differentialrechnung mit mehreren Variablen

Der Begriff der Ableitung einer Funktion $f(x)$ lässt sich auf Funktionen von mehreren Variablen übertragen. Betrachten wir die Änderung der Funktion $f(x, y)$ bei Änderung von x (y) bei festem y (x) an einem Punkt (x_0, y_0) , so gelangen wir auf natürliche Weise zu den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (3.6)$$

welche wie folgt definiert sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (3.8)$$

Die Berechnung der partiellen Ableitungen $\partial f / \partial \alpha$ erfolgt durch Differenzieren nach α , wobei alle anderen Variablen als konstant angesehen werden.

Beispiel

Die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y) = x^2 y + y \cos x$ sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \cos x$$

Von den höheren Ableitungen seien hier nur jene zweiter Ordnung erwähnt. Für eine Funktion $f(x, y)$ haben wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (3.9)$$

Sofern die Ableitungen stetig sind, kann man zeigen dass die gemischten Ableitungen gleich sind, also die Reihenfolge der Differentiation irrelevant ist.

Wie für Funktionen einer Variablen kann man die partiellen Ableitungen heranziehen, um Minima, Maxima, und Sattelpunkte von Funktionen mehrerer Variablen zu bestimmen. Hier beschränken wir uns auf Funktionen $f(x, y)$.

Die notwendige Bedingung für einen stationären Punkt ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \quad (3.10)$$

Ob $f(x, y)$ am Punkt (x_0, y_0) tatsächlich extremal ist, kann man mit Hilfe der Determinante der Hessematrix entscheiden:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad \Delta(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right]^2 \quad (3.11)$$

Es gelten die hinreichenden Bedingungen:

$$\begin{array}{lll} \Delta(x_0, y_0) > 0 & \& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 : & \text{lokales Minimum} \\ \Delta(x_0, y_0) > 0 & \& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 : & \text{lokales Maximum} \\ \Delta(x_0, y_0) < 0 : & & & \text{Sattelpunkt} \end{array} \quad (3.12)$$

Im allgemeinen Fall mit mehr als zwei Variablen ist es notwendig, die Eigenwerte der Hessematrix zu bestimmen. Eine positiv (negativ) definite Hessematrix bedeutet ein lokales Minimum (Maximum). Der Fall $|H| = 0$ erfordert stets eine gesonderte Untersuchung.

Beispiel

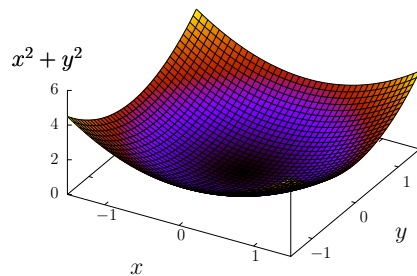
Für die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Der einzige stationäre Punkt ist also $(x, y) = (0, 0)$. Die Hessematrix ist gegeben durch

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

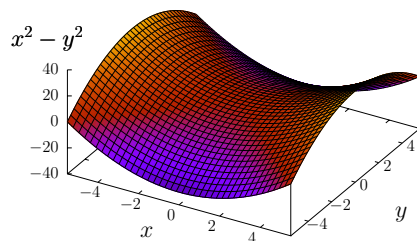
Somit gilt $\Delta(0, 0) = 4 > 0$, und $\partial^2 f / \partial x^2(0, 0) > 0$. $f(x, y)$ hat also bei $(0, 0)$ ein lokales Minimum.



Für die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Der einzige stationäre Punkt, $(x, y) = (0, 0)$, ist wegen $\Delta(0, 0) = -4 < 0$ ein Sattelpunkt.



3.2 Bahnkurven

Wir betrachten Vektoren die von der Zeit t (oder einem anderen Parameter) abhängen. Als Beispiel wählen wir den Ortsvektor eines Teilchens mit den kartesischen Komponenten $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Der Grenzwertbegriff lässt sich direkt auf Vektoren übertragen. Wir sagen, eine Folge von Vektoren $\vec{a}^{(n)}$ konvergiere gegen den Vektor $\vec{a}$ wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}^{(n)} = \vec{a}, \quad (3.13)$$

was natürlich auch für die Komponenten $a_i^{(n)}$ bzw. a_i gelten muss.



Aus der obigen Abbildung (links) ergibt sich die übliche Definition für die Zeitableitung:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}. \quad (3.14)$$

So wie die Differenz $\vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)$ und die Division durch δt ist die Ableitung von $\vec{r}$ komponentenweise definiert:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (3.15)$$

Diese Definition erfüllt z. B. die Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}, \\ \frac{d}{dt} \vec{a} \times \vec{b} &= \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Hier haben wir die weit verbreitete Konvention eingeführt, Zeitableitungen mit einem Punkt zu kennzeichnen.

Die Ableitung $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ stimmt an jedem Punkt der Bahnkurve mit dem Tangentenvektor überein (siehe Abbildung oben rechts). Die Integration des Geschwindigkeitsvektors bis zur Zeit T ergibt den Ort $\vec{r}(T)$,

$$\vec{r}(T) = \vec{r}(0) + \int_0^T \vec{v}(t) dt \quad (3.17)$$

während sich die Länge der Bahn als Summe der infinitesimalen Stücke $|\mathrm{d}\vec{r}|$ ergibt:

$$L = \int |\mathrm{d}\vec{r}| = \int_0^T \left| \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t = \int_0^T |\vec{v}(t)| \mathrm{d}t = \int_0^T \underbrace{\sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}}_{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}} \mathrm{d}t. \quad (3.18)$$

In kartesischen Koordinaten kann das Integral in Gl. (3.17) einfach für die einzelnen Komponenten berechnet werden:

$$\int_0^T \vec{v}(t) \mathrm{d}t = \hat{e}_x \int_0^T v_x(t) \mathrm{d}t + \hat{e}_y \int_0^T v_y(t) \mathrm{d}t + \hat{e}_z \int_0^T v_z(t) \mathrm{d}t \quad (3.19)$$

Die Vereinfachung ist möglich, weil die kartesischen Basisvektoren an jedem Punkt der Bahn $\vec{r}(t)$ gleich sind. Im Gegensatz dazu ändern sich die Basisvektoren in krummlinigen Koordinatensystemen mit dem Ort und deshalb [als Folge der Bewegung mit Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$] auch mit der Zeit. [Die Zeit parametrisiert die Bahn bzw. Kurve $\vec{r}(t)$.] Die Komponenten des Vektors $\vec{r}$ ändern sich also zum einen aufgrund der Bewegung selbst und zum anderen aufgrund der Variation der Basisvektoren im Raum.

In Polarkoordinaten beschreiben wir den Ort eines Teilchens durch r und φ . Ein allgemeiner Vektor hat die Darstellung

$$\vec{q} = q_r \hat{e}_r + q_\varphi \hat{e}_\varphi. \quad (3.20)$$

Die Basisvektoren hängen vom Winkel φ ab,

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \hat{e}_x \cos \varphi + \hat{e}_y \sin \varphi \\ \hat{e}_\varphi &= -\hat{e}_x \sin \varphi + \hat{e}_y \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die Ableitung nach der Zeit mit Hilfe der Kettenregel liefert daher:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_r &= \hat{e}_x (-\sin \varphi) \dot{\varphi} + \hat{e}_y (\cos \varphi) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} (-\hat{e}_x \sin \varphi + \hat{e}_y \cos \varphi) = \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \\ \dot{\hat{e}}_\varphi &= -\hat{e}_x (\cos \varphi) \dot{\varphi} + \hat{e}_y (-\sin \varphi) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} (-\hat{e}_x \cos \varphi - \hat{e}_y \sin \varphi) = -\dot{\varphi} \hat{e}_r \end{aligned}$$

Für einen Ortsvektor $\vec{r} = r \vec{e}_r$ erhalten wir den Geschwindigkeitsvektor

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r \\ &= \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \end{aligned} \quad (3.22)$$

Der Beschleunigungsvektor ergibt sich als

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\hat{e}}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \hat{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\hat{e}}_\varphi \\ &= \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \hat{e}_\varphi - r \dot{\varphi} \dot{\hat{e}}_r \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \hat{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.3. Gradient, Divergenz, Rotation in kartesischen Koordinaten

Betrachten wir eine gleichförmige Kreisbewegung mit $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$ und $\ddot{\varphi} = 0$, dann erhalten wir einen tangentialen Geschwindigkeitsvektor und die radiale Zentripetalbeschleunigung:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= r\omega\hat{e}_\varphi \\ \vec{a} &= -r\omega^2\hat{e}_r\end{aligned}\tag{3.24}$$

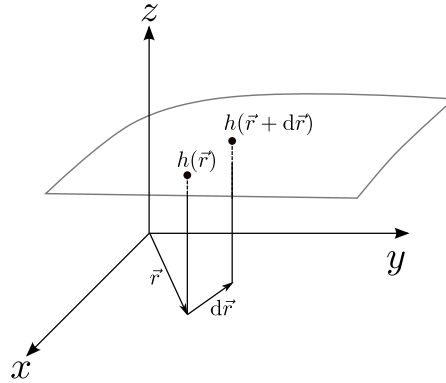
In Polarkoordinaten ergeben sich in diesem Fall also konstante Vektorkomponenten für $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$, und damit eine deutliche Vereinfachung des Problems.

Eine analoge Herleitung kann für Zylinder- und Kugelkoordinaten erfolgen.

3.3 Gradient, Divergenz, Rotation in kartesischen Koordinaten

Wir lernen im Folgenden Differentialoperatoren kennen, die eine wichtige Rolle in der Physik spielen, z. B. in der Fluidodynamik und in der Elektrodynamik. Dazu betrachten wir zuerst den einfachsten Fall von kartesischen Koordinaten.

3.3.1 Gradient



Es sei $h(\vec{r})$ eine Funktion des Vektors $\vec{r} = (x, y)$, also anschaulich die Höhe einer Fläche über der xy -Ebene. Wir interessieren uns für die Änderung der Höhe bei Änderung des Vektors $\vec{r}$. Für kleine Änderungen von $\vec{r}$ gilt

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy\tag{3.25}$$

Um dh unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems zu schreiben, verwenden wir den zweidimensionalen Nablaoperator,

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y}\tag{3.26}$$

dessen Anwendung auf die Funktion $h(\vec{r})$

$$\nabla h(\vec{r}) = \hat{e}_x \frac{\partial h}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.27)$$

ergibt. Die Änderung dh schreiben wir als invariantes Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} dh &= \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \\ &= (\hat{e}_x dx + \hat{e}_y dy) \cdot \left(\hat{e}_x \frac{\partial h}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$= d\vec{r} \cdot \nabla h(\vec{r}) \quad (3.29)$$

Dieser Ausdruck gilt in beliebigen Koordinatensystemen. Den Vektor ∇h nennt man den Gradienten von h , mit der Schreibweise $\nabla h = \text{grad } h$.

In drei Dimensionen haben wir

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.30)$$

und angewendet auf ein Skalarfeld $f(\vec{r})$

$$\text{grad } f = \nabla f = \hat{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (3.31)$$

Die Differentialoperatoren wirken hier nur auf f , nicht auf die Basisvektoren.

Eine nützliche Kurzschreibweise ist

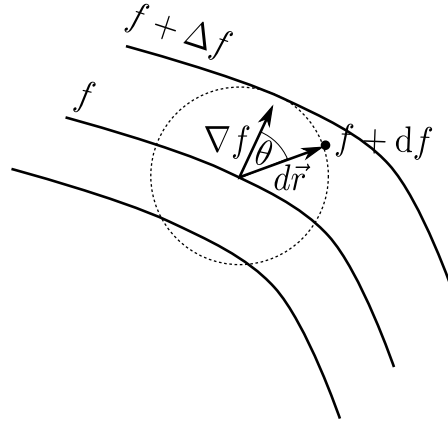
$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \alpha = x, y, z \quad (3.32)$$

- Der Gradient beschreibt die räumliche Änderung eines Skalarfeldes, z. B. die Änderung der Temperatur als Funktion des Ortes.
- Der Vektor ∇f (sofern $\nabla f \neq 0$ zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs von f . $|\nabla f|$ ist die Größe der Änderung von f in dieser Richtung. Um das zu verstehen, betrachten wir die Konturlinien von f :

Die Änderung df ist am größten, wenn $d\vec{r}$ senkrecht zu den Konturlinien ist. Andererseits wissen wir, dass

$$df = d\vec{r} \cdot \nabla f \quad (3.33)$$

gilt. Weil $d\vec{r} \cdot \nabla f = |d\vec{r}| |\nabla f| \cos \theta$, ist $df = d\vec{r} \cdot \nabla f$ also maximal wenn $\theta = 0$. Folglich haben wir die maximale Änderung wenn $d\vec{r}$ parallel zu ∇f ist. Entsprechend muss ∇f normal zu den Konturlinien liegen und somit in Richtung des stärksten Anstiegs von f zeigen.



- Die am Anfang des Kapitels gegebene Bedingung für einen stationären Punkt (Verschwinden aller partiellen Ableitungen) lässt sich mit Hilfe des Gradienten in folgender Form schreiben:

$$\nabla f = 0$$

Der Gradient spielt eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von Kraftfeldern $\vec{F}(\vec{r})$. Konservative Kraftfelder sind definiert als Felder in denen die Arbeit zur Verschiebung einer Probeladung/masse von Punkt A zu Punkt B

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (3.34)$$

nur von A und B , aber nicht vom Weg dazwischen abhängt. Solche Felder können stets in der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}). \quad (3.35)$$

geschrieben werden; das Skalarfeld Φ heißt in diesem Fall das Potential zum Feld $\vec{F}$.

Eine Vektorform des Fundamentalsatzes der Analysis lautet:

$$\int_{\gamma(A,B)} \nabla f(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) \quad (3.36)$$

Hier ist γ eine beliebige Kurve mit den Endpunkten A und B .

In einem konservativen Kraftfeld gilt also

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \nabla\Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -[\Phi(B) - \Phi(A)] \quad (3.37)$$

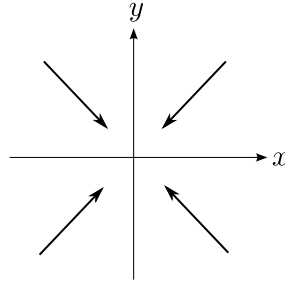
Insbesondere ist für geschlossene Wege (also $A = B$) $W = 0$.

Beispiel

Wir betrachten die Gravitationskraft die eine Masse M am Ort $(0, 0, 0)$ auf eine Probemasse m am Punkt $\vec{r} = (x, y, z)$ ausübt. Das Newtonsche Gesetz besagt dass

$$\vec{F} = -m \frac{GM}{r^3} \vec{r} = -mGM \left(\hat{e}_x \frac{x}{r^3} + \hat{e}_y \frac{y}{r^3} + \hat{e}_z \frac{z}{r^3} \right) = m\vec{g}(\vec{r})$$

wobei der Abstand durch $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gegeben ist. $\vec{g}$ ist das Feld der Masse M . Die Kraft ist radial gerichtet:



Wir können zeigen, dass die Funktion

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

das Potential des Kraftfeldes $\vec{g}$ ist:

$$\begin{aligned} -\nabla\Phi &= \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{GM}{r} \\ &= GM \left[\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right] \\ &= GM \left[\hat{e}_x \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{e}_y \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{e}_z \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} \right] \\ &= GM \left[\hat{e}_x \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{2r} 2x + \hat{e}_y \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{2r} 2y + \hat{e}_z \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{2r} 2z \right] \\ &= -GM \left(\hat{e}_x \frac{x}{r^3} + \hat{e}_y \frac{y}{r^3} + \hat{e}_z \frac{z}{r^3} \right) = \vec{g} \end{aligned}$$

Betrachten wir stattdessen ein Potential der Form

$$\Psi(r) = -cr$$

dann bekommen wir

$$\begin{aligned} -\nabla\Psi &= \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) cr \\ &= c \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} r + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} r + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} r \right) \\ &= c \left(\frac{2x}{2r} \hat{e}_x + \frac{2y}{2r} \hat{e}_y + \frac{2z}{2r} \hat{e}_z \right) = \frac{c}{r} \vec{r} \end{aligned}$$

Potentiale die nur vom Abstand aber nicht von der Richtung abhängen, nennt man auch Zentralpotentiale. Sie ergeben Kraftfelder mit sphärischer Symmetrie.

Weitere Anwendungen des Gradienten:

- Mit Hilfe des Gradienten lässt sich die Ableitung von f in Richtung des Einheitsvektors $\hat{n}$ am Punkt $\vec{P}$ in folgender Weise schreiben:

$$D_{\hat{n}}f(\vec{P}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{P} + t\hat{n}) - f(\vec{P})}{t} = \hat{n} \cdot \nabla f \quad (3.38)$$

Wegen $\hat{n} \cdot \nabla f = |\nabla f| \cos \alpha$ ist $D_{\hat{n}}f$ maximal wenn $\hat{n}$ parallel zu ∇f ist.

In kartesischen Koordinaten entspricht die Richtungsableitung in Richtung von $\hat{e}_\alpha$ gerade der partiellen Ableitung nach α :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \hat{e}_x \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \hat{e}_y \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \hat{e}_z \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

3.3.2 Divergenz und Rotation

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{v}$ ist definiert als

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} \quad (3.39)$$

In kartesischen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \left(\hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{e}_x v_x + \hat{e}_y v_y + \hat{e}_z v_z) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Im Unterschied zum Gradienten ist die Divergenz eine skalare Größe.

Eine weitere nützliche mathematische Operation ist das Kreuzprodukt des Nablaoperators mit einem Vektorfeld, genannt **Rotation**,

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} \quad (3.41)$$

In kartesischen Koordinaten gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (3.42)$$

Die Rotation ist also auch eine vektorielle Größe. Hier ist zu beachten, dass die Determinantenschreibweise nur gilt, wenn nach der ersten Zeile entwickelt wird.

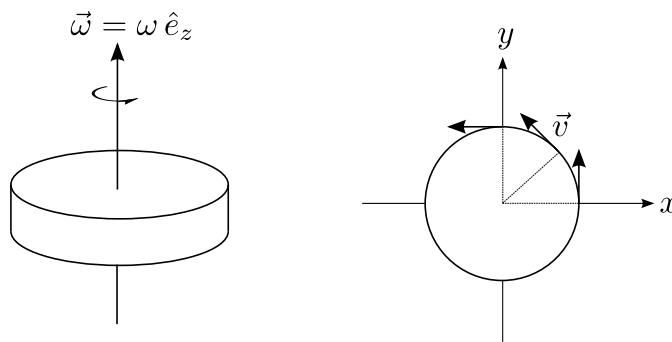
Beispiel

Wir berechnen Divergenz und Rotation des Vektorfeldes $\vec{v} = (xz, 2yz, z)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= \nabla \cdot \vec{v} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} xz + \frac{\partial}{\partial y} 2yz + \frac{\partial}{\partial z} z \\ &= z + 2z + 1 \\ &= 3z + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{v} &= \nabla \times \vec{v} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xz & 2yz & z \end{vmatrix} \\ &= \hat{e}_x \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ 2yz & z \end{vmatrix} - \hat{e}_y \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_z \\ xz & z \end{vmatrix} + \hat{e}_z \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ xz & 2yz \end{vmatrix} \\ &= \hat{e}_x(0 - 2y) - \hat{e}_y(0 - x) + \hat{e}_z(0 - 0) \\ &= \begin{pmatrix} -2y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Rotation ist ein Maß für die Drehung eines Vektorfeldes. Wir betrachten dazu einen starren Körper, dessen Bewegung durch den Vektor der Winkelgeschwindigkeit, $\vec{\omega} = |\omega|\hat{e}_z$ beschrieben wird.



Der Geschwindigkeitsvektor eines Massenpunktes am Ort $\vec{r}$ ist dann gegeben durch

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

3.3. Gradient, Divergenz, Rotation in kartesischen Koordinaten

Der Vektor liegt also in der xy Ebene. Daraus folgt für die Rotation

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{\omega}, \quad (3.44)$$

sodass die Rotation sowohl die Richtung als auch die Geschwindigkeit der Drehung widerspiegelt.

3.3.3 Quellenfreie und wirbelfreie Vektorfelder

Die folgenden wichtigen Beziehungen gelten in beliebigen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \text{rot grad } \Phi &= \nabla \times \nabla \Phi = 0 \\ \text{div rot } \vec{v} &= \nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

- Ein Feld, das sich als Gradient eines Potentials schreiben lässt, hat Rotation Null, und heißt wirbelfreies Feld.

Umgekehrt folgt aus $\text{rot } \vec{F} = 0$ die Existenz eines Potentials Φ sodass $\vec{F} = -\nabla \Phi$. Wirbelfreie Felder heißen auch konservative Felder, weil entlang eines geschlossenen Weges C keine Arbeit verrichtet wird:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \nabla \Phi \cdot d\vec{r} = \Phi(A) - \Phi(A) = 0 \quad (3.46)$$

Für geschlossene Integrationswege verwendet man auch die Notation $\oint$.

Beispiel

Wir hatten bereits gesehen, dass sich die Gravitationskraft in der Form $\vec{F} = -\nabla \Phi$ schreiben lässt. Wir haben

$$\vec{F} = -\frac{c}{r^3} \vec{r}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= -c \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} \\ &= -c \left[\hat{e}_x \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} - \hat{e}_y \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} + \hat{e}_z \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} \end{vmatrix} \right] \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie der Ausdrücke (die Determinanten die mit dem Basisvektor $\hat{e}_\alpha$ multipliziert werden enthalten jeweils die anderen beiden Komponenten) betrachten wir nur den ersten Term:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{r^3} = z \frac{-3}{r^4} \frac{2y}{2r} - y \frac{-3}{r^4} \frac{2z}{2r} = 0$$

Da $\vec{F}$ radial gerichtet ist, gibt es anschaulich keine Rotationskomponente.

- Ein Feld, das sich als Rotation eines anderen Feldes schreiben lässt, hat Divergenz Null und heißt quellenfreies Feld. Ein wichtiges Beispiel ist das magnetische Feld $\vec{B}$, welches sich mit Hilfe des magnetischen Vektorpotentials in der Form

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.47)$$

schreiben lässt. Wegen $\text{div} \text{rot} \vec{A} = 0$ gilt die Gleichung

$$\text{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad (3.48)$$

Diese Gleichung ist eine der Maxwellgleichungen, und formuliert die Tatsache, dass es keine magnetischen Ladungen gibt.

Ein quellenfreies Feld hat nur eine rotierende Komponente. Der Fluss durch eine beliebige geschlossene Fläche (z.B. eine Kugel) ist Null.

3.3.4 Laplaceoperator

Der Laplaceoperator, Δ , ist definiert durch seine Wirkung auf ein Skalarfeld f :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \text{div}(\text{grad} f) \\ &= \nabla \cdot (\nabla f) \\ &= (\hat{e}_x \partial_x + \hat{e}_y \partial_y + \hat{e}_z \partial_z) \cdot \left(\hat{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Das können wir auch in der Form

$$\begin{aligned} \Delta &= \nabla \cdot \nabla \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

schreiben. Die erste Zeile gilt allgemein, die zweite Zeile nur in kartesischen Koordinatensystemen.

Z.B. genügt das elektrische Potential der folgenden Differentialgleichung (Poissongleichung, oder Laplacegleichung wenn $\rho = 0$):

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.51)$$

3.3.5 Rechenregeln

Für Skalarfelder f, g und Vektorfelder $\vec{v}, \vec{w}$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= f \nabla g + g \nabla f \\ \nabla(\vec{v} \cdot \vec{w}) &= (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{w}) + \vec{w} \times (\nabla \times \vec{v}) \\ \nabla \cdot (f \vec{v}) &= f \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla f \\ \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w}) \\ \nabla \cdot (\nabla f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f \quad (\text{Laplaceoperator}) \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) &= \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0 \quad (\text{quellenfrei}) \\ \nabla \times (\nabla f) &= \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0 \quad (\text{wirbelfrei}) \\ \nabla \times f \vec{v} &= f \nabla \times \vec{v} + \nabla f \times \vec{v} \\ \nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{w}(\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v}(\nabla \cdot \vec{w}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) &= \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v}\end{aligned}$$

Beispiel

Zur Übung beweisen wir die erste Zeile:

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= (\partial_x(fg), \partial_y(fg), \partial_z(fg)) \\ &= (g\partial_x f + f\partial_x g, g\partial_y f + f\partial_y g, g\partial_z f + f\partial_z g) \\ &= (g\partial_x f, g\partial_y f, g\partial_z f) + (f\partial_x g, f\partial_y g, f\partial_z g) \\ &= g(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) + f(\partial_x g, \partial_y g, \partial_z g) \\ &= g \nabla f + f \nabla g\end{aligned}$$

3.4 Gradient, Divergenz, Rotation in anderen Koordinaten

Die soeben kennengelernten Differentialoperatoren beschreiben die räumliche Variation von Skalar- und Vektorfeldern. Wie schon im Fall von zeitabhängigen Vektoren führt die Ortsabhängigkeit der Basisvektoren in krummlinigen Koordinatensystemen zu etwas komplizierteren Ausdrücken im Vergleich zu kartesischen Koordinaten.

3.4.1 Polarkoordinaten

Am einfachsten lassen sich die Zusammenhänge wieder in Polarkoordinaten verstehen. Um den Nablaoperator in Polarkoordinaten zu bestimmen, betrachten wir die Änderung

des Skalarfeldes $f(\vec{r})$ zwischen den zwei Punkten $\vec{r} = (r, \varphi)$ und $\vec{r} + d\vec{r} = (r + dr, \varphi + d\varphi)$,

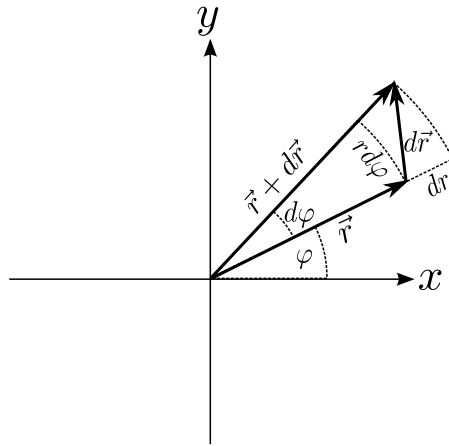
$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi \quad (3.52)$$

Der Gradient soll unabhängig von der Wahl der Koordinaten folgende Gleichung erfüllen:

$$df = d\vec{r} \cdot \nabla f \quad (3.53)$$

wobei der Vektor $d\vec{r}$ in Polarkoordinaten folgende Darstellung hat:

$$d\vec{r} = dr \hat{e}_r + r d\varphi \hat{e}_\varphi \quad (3.54)$$



Der Gradient von f ist ein Vektor, und deshalb ebenfalls mit Hilfe von $\hat{e}_r$ und $\hat{e}_\varphi$ darstellbar:

$$\nabla f = \alpha \hat{e}_r + \beta \hat{e}_\varphi \quad (3.55)$$

Mit diesem Ansatz erhalten wir

$$\begin{aligned} df &= d\vec{r} \cdot \nabla f \\ &= (dr \hat{e}_r + r d\varphi \hat{e}_\varphi) \cdot (\alpha \hat{e}_r + \beta \hat{e}_\varphi) \\ &= \alpha dr + \beta r d\varphi \end{aligned} \quad (3.56)$$

Der Vergleich mit Gleichung (3.52) ergibt

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \beta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (3.57)$$

und damit für den Gradienten von f in Polarkoordinaten

$$\nabla f = \hat{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (3.58)$$

3.4. Gradient, Divergenz, Rotation in anderen Koordinaten

Der Nablaoperator ist also in Polarkoordinaten gegeben durch

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3.59)$$

Mit Hilfe des Nablaoperators können wir auch die Divergenz in Polarkoordinaten ableiten, müssen dabei aber die Abhängigkeit der Basisvektoren von r und φ beachten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r} &= \partial_r (\cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y) = 0 \\ \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial r} &= \partial_r (-\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y) = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} &= \partial_\varphi (\cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y) = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y = \hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= \partial_\varphi (-\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y) = -\cos \varphi \hat{e}_x - \sin \varphi \hat{e}_y = -\hat{e}_r \end{aligned} \quad (3.61)$$

Die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{v}$ ist damit

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= \left(\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (v_r \hat{e}_r + v_\varphi \hat{e}_\varphi) \\ &= \hat{e}_r \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (v_r \hat{e}_r) + \frac{\partial}{\partial r} (v_\varphi \hat{e}_\varphi) \right] + \frac{1}{r} \hat{e}_\varphi \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (v_r \hat{e}_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi \hat{e}_\varphi) \right] \\ &= \hat{e}_r \cdot \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{e}_r + v_r \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r}}_0 + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \hat{e}_\varphi + v_\varphi \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial r}}_0 \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \hat{e}_\varphi \cdot \left[\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \hat{e}_r + v_r \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi}}_{\hat{e}_\varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + v_\varphi \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi}}_{-\hat{e}_r} \right] \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \underbrace{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_r}_1 + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \underbrace{\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\varphi}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \underbrace{\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_r}_0 + \frac{1}{r} v_r \underbrace{\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \underbrace{\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi}_1 - \frac{1}{r} v_\varphi \underbrace{\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_r}_0 \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Die Divergenz wird üblicherweise noch folgendermaßen umgeschrieben:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad (3.63)$$

Den Laplaceoperator erhalten wir, in dem wir in den Ausdruck für die Divergenz den speziellen Vektor

$$\vec{v} = \nabla f = \underbrace{\hat{e}_r \frac{\partial f}{\partial r}}_{v_r} + \underbrace{\hat{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}}_{v_\varphi} \quad (3.64)$$

einsetzen:

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= \nabla \cdot \nabla f \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \underbrace{\frac{\partial f}{\partial r}}_{v_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}}_{v_\varphi} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Beispiel

Wir berechnen die Divergenz des radialen Vektorfeldes $\vec{v} = r\hat{e}_r$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rr) + \frac{1}{r} 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 = 2$$

In kartesischen Koordinaten gilt $\vec{v} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$, und

$$\nabla \cdot \vec{v} = \partial_x x + \partial_y y = 2$$

Die Divergenz ist also unabhängig vom Koordinatensystem. Hätten wir die Divergenz in Polarkoordinaten als $\nabla \cdot \vec{v} = \partial_r v_r + \partial_\varphi v_\varphi$ definiert, wäre das nicht der Fall.

3.4.2 Zylinderkoordinaten

Die Herleitung der Differentialoperatoren kann auf demselben Weg wie für Polarkoordinaten erfolgen. Für die Ableitungen der Basisvektoren ergeben sich folgende Beiträge:

$$\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi} = \hat{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \hat{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\hat{e}_\rho \tag{3.66}$$

Alle anderen Ableitungen sind Null.

Der Gradient eines Skalarfeldes f in Zylinderkoordinaten ist gegeben durch

$$\nabla f = \hat{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \tag{3.67}$$

und für den Nablaoperator gilt entsprechend

$$\nabla = \hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.68}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist gegeben durch

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3.69}$$

3.4. Gradient, Divergenz, Rotation in anderen Koordinaten

Im Unterschied zu den Polarkoordinaten können wir in drei Dimensionen auch die Rotation definieren, welche in Zylinderkoordinaten durch

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{v} &= \frac{1}{\rho} \hat{e}_\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) - \hat{e}_\varphi \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \hat{e}_z \left(\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ v_\rho & \rho v_\varphi & v_z \end{vmatrix}\end{aligned}\quad (3.70)$$

gegeben ist (die Determinante muss nach der ersten Zeile entwickelt werden).

Schließlich haben wir noch den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3.71)$$

Beispiel

Das Magnetfeld eines vom Strom I durchflossenen Leiters in der z Richtung ist gegeben durch

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \hat{e}_x + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{e}_y \right)$$

Um die Divergenz und die Rotation von $\vec{B}$ zu berechnen, transformieren wir zuerst in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{-\rho \sin \varphi}{\rho^2} (\cos \varphi \hat{e}_\rho - \sin \varphi \hat{e}_\varphi) + \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2} (\sin \varphi \hat{e}_\rho + \cos \varphi \hat{e}_\varphi) \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \left[\hat{e}_\rho \underbrace{(-\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}_{=0} + \hat{e}_\varphi \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

Das Feld hat die Komponenten $B_\rho = 0$, $B_\varphi = \mu_0 I / 2\pi \rho$ und $B_z = 0$. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\varphi & \partial_z \\ 0 & \rho \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} & 0 \end{vmatrix} = 0\end{aligned}$$

Das Ergebnis $\nabla \times \vec{B} = 0$ ist überraschend, weil es sich bei $\vec{B}$ offensichtlich um ein Feld mit einer Drehkomponente handelt. Dieser Widerspruch hat damit zu tun, dass das Magnetfeld im Ursprung (dort wo der Strom fließt) singularär ist. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, wie diese Schwierigkeit umgangen werden kann.

3.4.3 Kugelkoordinaten

Der Gradient eines Skalarfeldes f ist gegeben durch

$$\nabla f = \hat{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (3.72)$$

Der Nablaoperator hat entsprechend die Form

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (3.73)$$

Die Divergenz ergibt sich als

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad (3.74)$$

Die Rotation kann in der Form (Entwicklung nach der ersten Zeile)

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\theta & r \sin \theta \hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ v_r & r v_\theta & r \sin \theta v_\varphi \end{vmatrix} \quad (3.75)$$

geschrieben werden, und der Laplaceoperator ist gegeben als

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (3.76)$$

Beispiel

Wir berechnen die Rotation des Feldes

$$\vec{F} = -\frac{c}{r^3} \vec{r} = -\frac{c}{r^3} r \hat{e}_r = -\frac{c}{r^2} \hat{e}_r$$

In Kugelkoordinaten erhalten wir

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\theta & r \sin \theta \hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ -\frac{c}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Das Feld hat in diesen Koordinaten nur eine Komponente F_r . Da die Ableitungen von r nach θ und φ verschwinden ist die Rotation Null.

3.4.4 Orthogonale, krummlinige Koordinaten in drei Dimensionen

Die Faktoren in den Differentialoperatoren im Vergleich zu kartesischen Koordinaten haben mit der Änderung des Ortsvektors bei Variation einer Koordinate zu tun. Betrachten wir orthogonale Koordinaten $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$, dann haben wir zunächst

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw \quad (3.77)$$

was mit den Koeffizienten

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| = h_u, \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = h_v, \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right| = h_w, \quad (3.78)$$

und $\hat{e}_\alpha = (\partial \vec{r} / \partial \alpha) / h_\alpha$ (Kapitel 2) zu folgender Darstellung führt:

$$d\vec{r} = h_u du \hat{e}_u + h_v dv \hat{e}_v + h_w dw \hat{e}_w. \quad (3.79)$$

Während in kartesischen Koordinaten $h_x = h_y = h_z = 1$ gilt, ist das im Allgemeinen nicht der Fall. Entsprechend ergeben sich die Differentialoperatoren wie folgt:

$$\nabla f = \sum_\alpha \frac{1}{h_\alpha} \hat{e}_\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{h_u} \hat{e}_u \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{h_v} \hat{e}_v \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{h_w} \hat{e}_w \frac{\partial f}{\partial w} \quad (3.80)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(A_\alpha \prod_{\beta \neq \alpha} h_\beta \right) \quad (3.81)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{e}_u & h_v \hat{e}_v & h_w \hat{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix} \quad (3.82)$$

Die Ausdrücke $\sum_\alpha$ und $\prod_\alpha$ sind hier so zu verstehen, dass α die Werte u, v, w durchläuft.

Aus den entsprechenden Definitionen in Kapitel 2 folgt für Zylinderkoordinaten

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1,$$

und für Kugelkoordinaten

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$$

4 Vektoranalysis: Integralrechnung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Integralen von Vektorfeldern, und insbesondere mit mehreren Sätzen die Zusammenhänge zwischen Kurven-, Flächen- und Volumnsintegralen herstellen.

4.1 Kurvenintegrale

Als erstes betrachten wir Kurvenintegrale von Vektorfeldern der Form

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (4.1)$$

Hier bezeichnen A und B die Anfangs- und Endpunkte einer Kurve. Die Notation ist physikalisch motiviert: wenn $\vec{F}(\vec{r})$ ein Kraftfeld ist, dann entspricht das obige Integral der Arbeit W die an einem Teilchen bei der Verschiebung von A nach B verrichtet wird. Für eine infinitesimale Verschiebung ist $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha$, also gleich der Verschiebung $dr = |d\vec{r}|$ mal der Komponente von $\vec{F}$ in Richtung von $d\vec{r}$.

Der Vektor $d\vec{r}$ hat je nach Koordinatensystem eine andere Darstellung (siehe Gl. 3.79)

$$\begin{aligned} \text{Kartesische Koord. (2D): } d\vec{r} &= dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y \\ \text{Kartesische Koord. (3D): } d\vec{r} &= dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z \\ \text{Polarkoordinaten: } d\vec{r} &= dr\hat{e}_r + r d\varphi\hat{e}_\varphi \\ \text{Zylinderkoordinaten: } d\vec{r} &= d\rho\hat{e}_\rho + \rho d\varphi\hat{e}_\varphi + dz\hat{e}_z \\ \text{Kugelkoordinaten: } d\vec{r} &= dr\hat{e}_r + r d\theta\hat{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi \end{aligned} \quad (4.2)$$

In kartesischen Koordinaten erfolgt die Berechnung von Kurvenintegralen durch separate Integration der einzelnen Komponenten. Z. B. haben wir in zwei Dimensionen

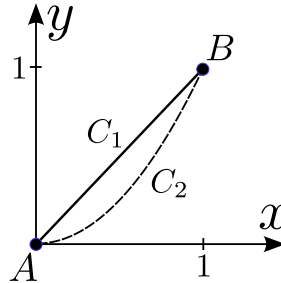
$$W = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x, y) dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y(x, y) dy \quad (4.3)$$

(x_A, y_A) und (x_B, y_B) sind die kartesischen Koordinaten der Anfangs- und Endpunkte A und B . Für die Integration entlang der Kurve von A nach B müssen wir im ersten Integral y als Funktion von x kennen, und im zweiten Integral x als Funktion von y .

4.1. Kurvenintegrale

Beispiel

Wir berechnen die Arbeit, die von dem Kraftfeld $\vec{F} = xy\hat{e}_x + y^2\hat{e}_y$ verrichtet wird, wenn ein Teilchen von $A = (0, 0)$ nach $B = (1, 1)$ verschoben wird. Dazu betrachten wir zuerst die Kurve C_1 mit $y = x$, und dann die Kurve C_2 mit $y = x^2$.



Die Arbeit ist in beiden Fällen gegeben durch

$$W = \int_0^1 xy dx + \int_0^1 y^2 dy$$

Entlang C_1 haben wir $x = y$, und damit

$$W = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Auf der Kurve C_2 gilt $y = x^2$, und somit

$$W = \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Dass die Arbeit von der Wahl des Weges abhängt spiegelt sich auch in $\nabla \times F = -x\hat{e}_z \neq 0$ wieder.

Alternativ können Kurvenintegrale auch mit Hilfe einer Parametrisierung der Kurve berechnet werden. Darunter verstehen wir eine Darstellung $(x(s), y(s))$ (also zwei Funktionen die vom Parameter s abhängen), die für $s \in [s_A, s_B]$ jeweils den Koordinaten eines Punktes auf der Kurve entspricht. Das Integral hat dann die Form

$$W = \int_{s_A}^{s_B} \left[F_x(x(s), y(s)) \frac{dx}{ds} + F_y(x(s), y(s)) \frac{dy}{ds} \right] ds \quad (4.4)$$

Beispiel

Für die Kurve C_2 des vorherigen Beispiels verwenden wir

$$x(s) = s, \quad y(s) = s^2, \quad 0 \leq s \leq 1$$

sowie $dx/ds = 1$ und $dy/ds = 2s$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (s s^2 1 + s^4 2s) ds \\ &= \int_0^1 (s^3 + 2s^5) ds \\ &= \left(\frac{s^4}{4} + \frac{s^6}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Wie erwartet erhalten wir dasselbe Resultat wie oben.

4.2 Flächenintegrale

4.2.1 Zwei Dimensionen

In zwei Dimensionen hat ein Flächenintegral die Form

$$I = \int_A f(\vec{r}) dA \quad (4.5)$$

Wir integrieren also ein Skalarfeld und erhalten wiederum einen Skalar. Flächen werden oft mit den Buchstaben A (area) oder S (surface) bezeichnet, und dasselbe gilt auch für das infinitesimale Flächenelement, dA oder dS . In orthogonalen Koordinatensystemen wie etwa kartesischen oder Polarkoordinaten ist das Flächenelement ein Rechteck,

$$\begin{aligned} \text{Kartesische Koordinaten : } dA &= dx dy \\ \text{Polarkoordinaten : } dA &= r d\varphi dr \end{aligned} \quad (4.6)$$

Das Flächenintegral kann dann als ein Doppelintegral über x und y bzw. über r und φ aufgefasst werden. Z. B. berechnet sich die Fläche eines Kreises mit Radius R als

$$A = \int_A dA = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2 \quad (4.7)$$

4.2.2 Drei Dimensionen

In drei Dimensionen kann man einer Fläche nicht nur einen Inhalt, sondern auch eine Richtung zuordnen. Die Richtung ist in der Regel durch einen Normalvektor der Fläche festgelegt. Das vektorielle Flächenelement wird mit $d\vec{A}$ oder $d\vec{S}$ bezeichnet.

- Für geschlossene Flächen (z. B. die Oberfläche einer Kugel) zeigt der Vektor $d\vec{S}$ per Definition nach außen.

4.2. Flächenintegrale

- Für offene Flächen die von einer Kurve C begrenzt werden kann man die Richtung so festlegen: wenn die Finger der rechten Hand in die Durchlaufrichtung von C (gegen den Uhrzeigersinn) zeigen, dann soll der Daumen die Richtung von $d\vec{S}$ angeben (Rechte-Hand-Regel).
- Eine nützliche Darstellung ist

$$d\vec{S} = \hat{n}dS = \hat{n}|d\vec{S}| \quad (4.8)$$

mit dem normierten Normalvektor $\hat{n}$.

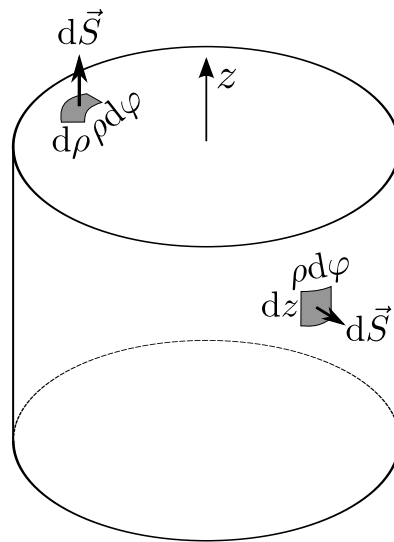
Da der Vektor $d\vec{S}$ seine Richtung auf einer beliebigen, krummen Fläche S von Punkt zu Punkt ändert, ist die Berechnung von allgemeinen Flächenintegralen schwierig. Vereinfachungen sind oft durch die Wahl geeigneter Koordinaten möglich, sodass auf der Fläche zumindest eine Koordinate konstant ist.

Kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned} yz \text{ Ebene, } x = \text{const} : d\vec{S} &= \pm dy dz \hat{e}_x \\ xz \text{ Ebene, } y = \text{const} : d\vec{S} &= \pm dx dz \hat{e}_y \\ xy \text{ Ebene, } z = \text{const} : d\vec{S} &= \pm dx dy \hat{e}_z \end{aligned} \quad (4.9)$$

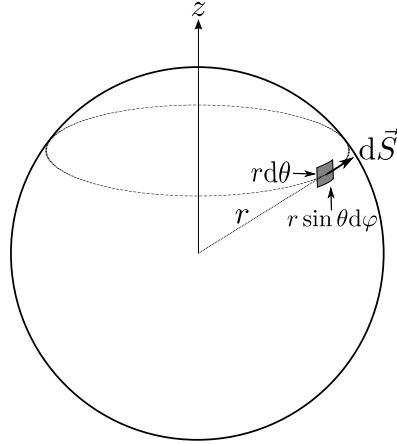
Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \text{obere Kreisfläche, } z = \text{const} : d\vec{S} &= \pm \rho d\varphi d\rho \hat{e}_z \\ \text{Zylindermantel, } \rho = \text{const} : d\vec{S} &= \rho d\varphi dz \hat{e}_\rho \end{aligned} \quad (4.10)$$



Kugelkoordinaten

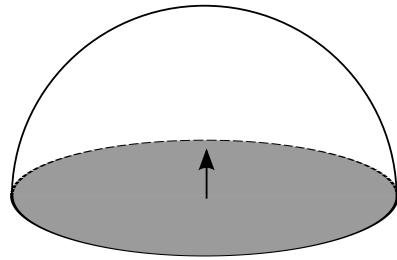
$$\text{Kugeloberfläche, } r = \text{const} : d\vec{S} = r \sin \theta d\varphi r d\theta \hat{e}_r = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta \hat{e}_r \quad (4.11)$$



Das Resultat eines Flächenintegrals in drei Dimensionen kann entweder ein Skalar oder ein Vektor sein.

Beispiel

Wir betrachten die Oberfläche S einer Halbkugel mit Radius R , $0 \leq \varphi < 2\pi$, und $0 \leq \theta \leq \pi/2$.



Für das Integral $\int_S dS$ benötigen wir das skalare Flächenelement dS , gegeben als

$$dS = |d\vec{S}| = |R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{e}_r| = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Damit bekommen wir

$$\int_S dS = R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \sin \theta = 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta = 2\pi R^2 (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} = 2\pi R^2$$

Um das Integral $\int_S d\vec{S}$ zu berechnen, benötigen wir

$$d\vec{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{e}_r$$

Wegen $d\vec{S} \sim \hat{e}_r$ ändert sich die Richtung von $d\vec{S}$ als Funktion der Winkel. Um das Integral zu berechnen, schreiben wir deshalb $\hat{e}_r$ mit Hilfe der kartesischen Basisvektoren [Gl. (2.42)]

$$\hat{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z$$

4.2. Flächenintegrale

und erhalten

$$\begin{aligned}\int_S d\vec{S} &= R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta \hat{e}_r \\ &= R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi (\sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z) \\ &= R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta [\sin \theta \sin \varphi \hat{e}_x - \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_y + \varphi \cos \theta \hat{e}_z]_0^{2\pi}\end{aligned}$$

Wegen $\sin 0 = \sin 2\pi$ und $\cos 0 = \cos 2\pi$ verschwinden die ersten beiden Terme. Der dritte Term gibt einen Faktor 2π . Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_S d\vec{S} &= 2\pi R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta \hat{e}_z \\ &= [\pi R^2 \sin^2 \theta \hat{e}_z]_0^{\pi/2} \\ &= \pi R^2 \hat{e}_z\end{aligned}$$

Die vektorielle Integration ergibt also einen Normalvektor der in die x - y Ebene projizierten Fläche. Die Länge des Vektors entspricht dem projizierten Flächeninhalt $R^2\pi$.

Skalare Flächenintegrale erlauben z.B. die Berechnung des Flusses eines Vektorfeldes durch eine Fläche,

$$F = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4.12)$$

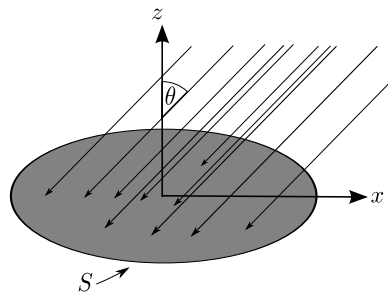
Hier kann $\vec{j}$ z. B. die Stromdichte einer Teilchenströmung sein,

$$\vec{j} = n\vec{v} \quad (4.13)$$

also die Zahl der Teilchen die sich pro Zeit- und Flächeneinheit durch eine Fläche normal zum Fluss bewegt.

Beispiel

Wir betrachten einen Teilchenstrom $\vec{j} = n\vec{v} = -nv(\sin \theta, 0, \cos \theta)$. Wie groß ist der Fluss F den ein Detektor mit einer kreisförmigen Apertur mit Radius a misst?



Die Antwort erhalten wir aus dem Integral (wir verwenden Zylinderkoordinaten)

$$\begin{aligned}
 F &= \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \\
 &= \int_S nv(-\sin\theta\hat{e}_x - \cos\theta\hat{e}_z) \cdot (\rho d\rho d\varphi \hat{e}_z) \\
 &= -nv \cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho \rho \\
 &= -nv \cos\theta \pi a^2 \\
 &= (-nv \cos\theta)A,
 \end{aligned}$$

also das Produkt aus der Detektorfläche A und der Projektion von $\vec{j}$ in die Detektorebene.

4.3 Volumenintegrale

Im Unterschied zu einer Fläche kann man einem Volumen keine Richtung zuordnen. Entsprechend sind sowohl das Volumen V als auch das Volumenelement dV Skalare. Volumenintegrale haben die Form

$$I = \int_V f(\vec{r}) dV \quad (4.14)$$

oder

$$\vec{I} = \int_V \vec{v}(\vec{r}) dV \quad (4.15)$$

Im ersten Fall ist das Ergebnis ein Skalar, im zweiten Fall ein Vektor.

Das Volumenelement ist ein infinitesimaler Quader. Wir haben

$$\begin{aligned}
 \text{Kartesische Koordinaten : } dV &= dx dy dz \\
 \text{Zylinderkoordinaten : } dV &= \rho d\varphi d\rho dz \\
 \text{Kugelkoordinaten : } dV &= r \sin\theta d\varphi r d\theta dr = r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.4 Jacobideterminante

Die Jacobideterminante erlaubt eine systematische Berechnung des Flächen- bzw. Volumenelementes in nichtkartesischen Koordinatensystemen.

Wir betrachten eine Koordinatentransformation $(x, y) \mapsto (u, v)$ in zwei Dimensionen. Während eine Variablensubstitution für ein Einfachintegral zu

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(x(u)) \frac{dx}{du} du \quad (4.17)$$

4.4. Jacobideterminante

führt, gilt für ein 2D Integral über ein Gebiet R^1

$$\iint_R f(x, y) \underbrace{dx dy}_{dA} = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv}_{dA} \quad (4.18)$$

Die Jacobideterminante ist definiert als

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix} = \partial_u x \partial_v y - \partial_v x \partial_u y \quad (4.19)$$

und beschreibt die Transformation zwischen den Flächenelementen $dx dy$ und $du dv$. Man beachte, dass im Integral der Absolutwert der Determinante steht.

Wenn wir den Ortsvektor in der Form $\vec{r} = x(u, v)\hat{e}_x + y(u, v)\hat{e}_y$ schreiben, ergeben sich die (nicht normierten) Basisvektoren im neuen (u, v) System aus (Gl. 2.17)

$$\vec{e}_u = \partial_u \vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_u x \\ \partial_u y \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_v = \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_v x \\ \partial_v y \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Somit entsprechen die Spalten der Jacobimatrix der Darstellung der Vektoren $\vec{e}_u, \vec{e}_v$ im alten System (x, y) , und die Jacobideterminante ist gleich dem Absolutwert $|\vec{e}_u \times \vec{e}_v|$, also dem Flächeninhalt des Parallelogramms das von $\vec{e}_u, \vec{e}_v$ aufgespannt wird.²

Beispiel

Für die Transformation von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten gilt ($u = r, v = \varphi$)

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi, \quad y(r, \varphi) = r \sin \varphi$$

und somit

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\varphi x \\ \partial_r y & \partial_\varphi y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$$

und somit haben wir für das Flächenelement $dA = r dr d\varphi$.

In drei Dimensionen gilt für das Volumenelement bei einer Koordinatentransformation $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$:

$$dV = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x & \partial_w x \\ \partial_u y & \partial_v y & \partial_w y \\ \partial_u z & \partial_v z & \partial_w z \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

¹Das Gebiet R hat in den neuen Koordinaten i.A. eine andere Form, R' . Man stelle sich R als Kreis mit $x^2 + y^2 = R^2$ vor. Wenn u, v Polarkoordinaten sind, entspricht R' dem Rechteck $[0, R] \times [0, 2\pi)$.

²Das Kreuzprodukt in zwei Dimensionen ist definiert als

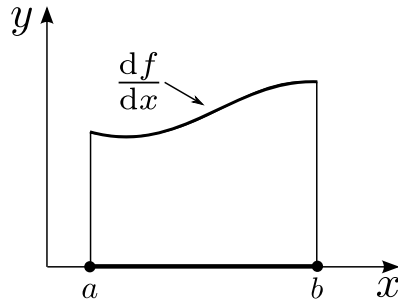
$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten der Jacobideterminante entsprechen wieder den Basisvektoren $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$. Die Determinante dieser drei Vektoren ist gleich dem Spatprodukt $\vec{e}_u \cdot (\vec{e}_v \times \vec{e}_w)$. Der Betrag des Spatproduktes, $|\vec{e}_u \cdot (\vec{e}_v \times \vec{e}_w)|$, ist gleich dem Volumen des Parallelepipeds das von den drei Vektoren aufgespannt wird. Der Zusammenhang zwischen dA bzw. dV und den Vektoren $\vec{e}_\alpha$ impliziert allgemein $dA = g_u g_v du dv$ bzw. $dV = g_u g_v g_w du dv dw$.

4.5 Satz von Green

Wir betrachten das Integral der Ableitung $f'(x)$ über das Intervall $[a, b]$,

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(b) - f(a). \quad (4.22)$$



Die Punkte $x = a$ und $x = b$ können wir als den Rand der eindimensionalen Menge $S = \{x | a \leq x \leq b\}$ betrachten. Gleichung (4.22) besagt, dass das Integral von $f'(x)$ über S durch die Werte der Stammfunktion $f(x)$ am Rand (also an den Punkten a und b) bestimmt ist.

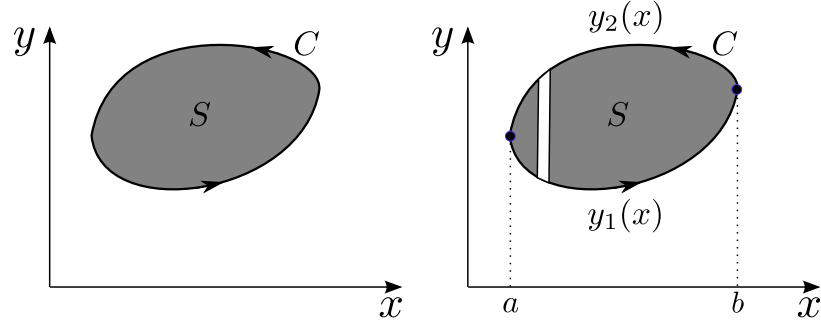
Der **Satz von Green** stellt eine Erweiterung von Gl. (4.22) auf zwei Dimensionen dar, und hat die Form

$$\int_S dS \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \oint_C (P dx + Q dy). \quad (4.23)$$

S sei hier ein Gebiet in der x - y Ebene, dessen Rand durch die geschlossene Kurve C gegeben ist: Die Kurve C wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Die Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ sind beliebig, werden später aber als die Komponenten v_x und v_y eines 2D Vektorfeldes aufgefasst werden.

Gleichung (4.23) stellt, ähnlich wie Gl. (4.22), einen Zusammenhang zwischen dem Integral der Ableitungen von P und Q über S , und dem Integral von P und Q selbst über den Rand C von S dar. Der Integrationsbereich auf der rechten Seite, $C = \partial S$, hat eine um eins niedrigere Dimension als der Integrationsbereich auf der linken Seite, S . Entsprechend tritt auf der rechten Seite von Gl. (4.22) kein Integral auf.



Zum Beweis des Satzes betrachten wir das Intervall $[a, b]$, und teilen den Rand C in zwei Kurven $y_1(x)$ und $y_2(x)$ auf. Das Flächenelement ist $dS = dx dy$. Für das Integral von $\partial_y P$ finden wir

$$\begin{aligned} \int_S dS \frac{\partial P}{\partial y} &= \int_S dx dy \frac{\partial P}{\partial y} = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b dx [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] \\ &= - \int_a^b dx P(x, y_1(x)) - \int_b^a dx P(x, y_2(x)) \\ &= - \oint_C dx P(x, y(x)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Eine ähnliche Rechnung liefert

$$\int_S dS \frac{\partial Q}{\partial x} = \oint_C dy Q(x(y), y) \quad (4.25)$$

und zusammen liefern die beiden Ergebnisse genau Gl. (4.23).

Der Satz von Green kann auch mit Hilfe von Vektoren geschrieben werden. Dazu betrachten wir P und Q als die Komponenten des Vektorfeldes $\vec{v} = (P, Q)$. Wenn wir die Fläche S in der xy -Ebene als im dreidimensionalen Raum eingebettet betrachten, dann können wir den Integranden auf der linken Seite von Gl. (4.23) als die z -Komponente der Rotation von $\vec{v}$ interpretieren:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = (\nabla \times \vec{v})_z = (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{e}_z \quad (4.26)$$

Mit der Schreibweise $d\vec{S} = dS \hat{e}_z$ (das vektorielle Flächenelement der Fläche S ; S liegt in der x - y Ebene) erhalten wir die Vektorform des Satzes von Green:

$$\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (4.27)$$

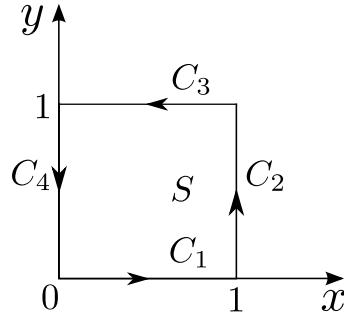
Die rechte Seite ist äquivalent zur rechten Seite von Gl. (4.23) da

$$\vec{v} \cdot d\vec{r} = v_x dx + v_y dy = P dx + Q dy \quad (4.28)$$

Wir werden sehen dass sich Gl. (4.27) auf allgemeine (gekrümmte) Flächen S und deren Rand C verallgemeinern lässt (Satz von Stokes).

Beispiel

Wir verifizieren den Satz von Green anhand des Vektorfeldes $\vec{v} = xy \hat{e}_x + x^2 \hat{e}_y$ und des quadratischen Gebietes S mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$.



Für die z -Komponente der Rotation von $\vec{v}$ finden wir

$$(\nabla \times \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2x - x = x$$

Das Integral auf der linken Seite von Gl. (4.27) ergibt $[d\vec{S} = dx dy \hat{e}_z]$

$$\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy x = \int_0^1 dx x = \frac{1}{2}$$

Zur Berechnung des Linienintegrals teilen wir den Rand C in die Teilstücke C_1 , C_2 , C_3 und C_4 auf. Mit $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$ und $d\vec{r} = dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y$ gilt

$$\begin{aligned} C_1: & y = 0, \quad d\vec{r} = \hat{e}_x dx, \quad \vec{v} \cdot d\vec{r} = (xy \hat{e}_x + x^2 \hat{e}_y) \cdot (\hat{e}_x dx) = xy dx = 0 \\ C_2: & x = 1, \quad d\vec{r} = \hat{e}_y dy, \quad \vec{v} \cdot d\vec{r} = (xy \hat{e}_x + x^2 \hat{e}_y) \cdot (\hat{e}_y dy) = x^2 dy = 1 dy \\ C_3: & y = 1, \quad d\vec{r} = -\hat{e}_x dx, \quad \vec{v} \cdot d\vec{r} = (xy \hat{e}_x + x^2 \hat{e}_y) \cdot (-\hat{e}_x dx) = -xy dx = -x dx \\ C_4: & x = 0, \quad d\vec{r} = -\hat{e}_y dy, \quad \vec{v} \cdot d\vec{r} = (xy \hat{e}_x + x^2 \hat{e}_y) \cdot (-\hat{e}_y dy) = -x^2 dy = 0 \end{aligned}$$

Die Richtung des Vektors $d\vec{r}$ hängt hier noch vom Vorzeichen von dx bzw. dy ab.

Weil auf C_1 und C_4 wegen $y = 0$ bzw. $x = 0$ der Integrand verschwindet, müssen nur C_2 und C_3 betrachtet werden, wobei $x = 1$ auf C_2 und $y = 1$ auf C_3 gilt. Wir haben somit

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} x^2 dy + \int_{C_3} -x dx = \int_0^1 1^2 dy + \underbrace{\int_1^0 x dx}_{dx < 0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

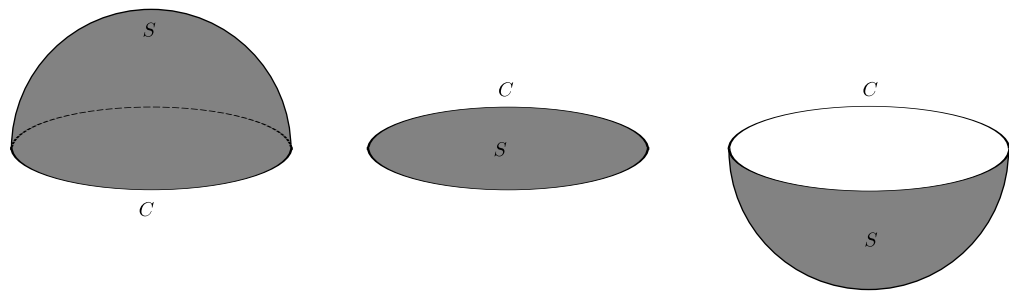
Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Definition, dass der Weg C entgegen dem Uhrzeigersinn zu durchlaufen ist.

4.6 Satz von Stokes

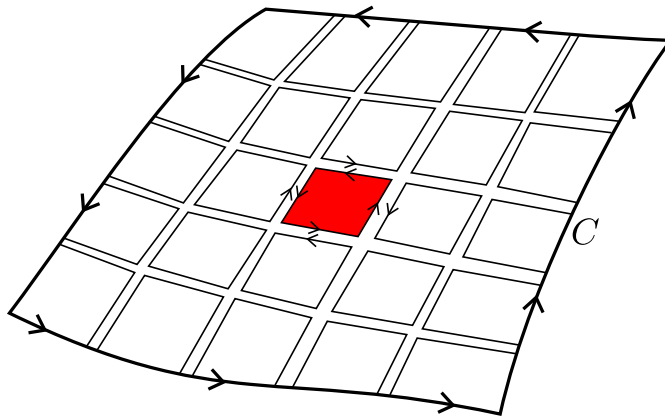
Der Satz von Stokes ist formal identisch zu Gl. (4.27),

$$\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (4.29)$$

Während der Satz von Green auf ebene Flächen S beschränkt ist, gilt der Satz von Stokes für beliebige, gekrümmte Flächen in drei Dimensionen, welche von der Kurve C begrenzt werden. Obwohl es zu einer Kurve C unendlich viele Flächen S gibt, besagt Gl. (4.29) dass für all diese Flächen das Integral $\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$ denselben Wert hat.



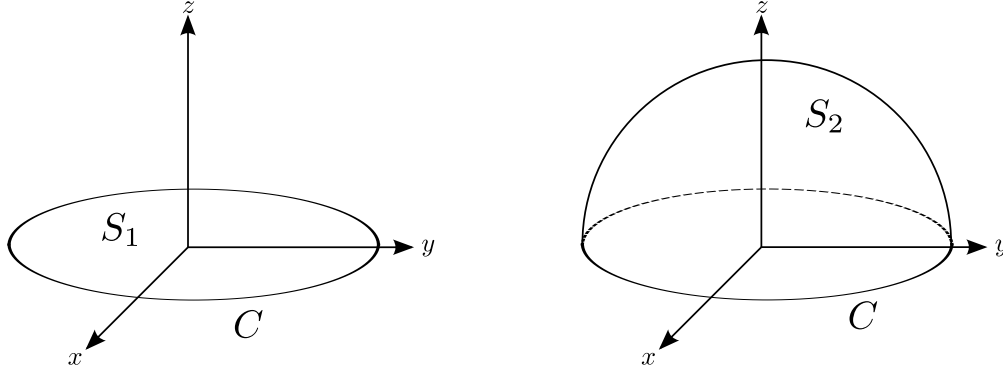
Auch ohne einen formalen Beweis kann die Gültigkeit des Satzes von Stokes anschaulich begründet werden. Dazu betrachten wir eine allgemeine Fläche S mit Rand C , und unterteilen sie in so viele kleine Stücke S_i wie notwendig, um jedes einzelne Stück als eine ebene Fläche auffassen zu können:



Wenn wir das Integral $\int_{S_i} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}_i$ für jede dieser ebenen Teilflächen berechnen und summieren, erhalten wir gerade $\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$. Bei der Addition der Linienintegrale heben sich aufgrund der entgegengesetzten Orientierung von benachbarten Teilflächen alle inneren Beiträge auf, und es bleibt nur $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$. Aus der bewiesenen Gültigkeit des Satzes von Green für ebene Flächen folgt damit der Satz von Stokes.

Beispiel

Wir prüfen die Gültigkeit des Satzes von Stokes anhand des Vektorfeldes $\vec{v} = y\hat{e}_x - x\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, und (a) der Fläche S_1 definiert durch $x^2 + y^2 \leq R^2$, $z = 0$ (Kreisscheibe in der x - y Ebene), (b) der Fläche S_2 definiert durch $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ (Halbkugel).



Die Kurve C ist in beiden Fällen dieselbe, nämlich ein Kreis mit dem Radius R . Zur Berechnung des Integrals verwenden wir Kugelkoordinaten mit $r = R$ und $\theta = \pi/2$ (entsprechend gilt $dr = 0$ und $d\theta = 0$). Das Linienelement aus Gl. (4.2) vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$d\vec{r} = dr\hat{e}_r + r d\theta\hat{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi = R d\varphi\hat{e}_\varphi$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \oint_C (y\hat{e}_x - x\hat{e}_y + 0\hat{e}_z) \cdot (R d\varphi\hat{e}_\varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} (R \sin\varphi\hat{e}_x - R \cos\varphi\hat{e}_y) \cdot (-\sin\varphi\hat{e}_x + \cos\varphi\hat{e}_y) R d\varphi \\ &= -R^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi \\ &= -2\pi R^2 \end{aligned}$$

Um die Flächenintegrale zu berechnen, benötigen wir die Rotation von $\vec{v}$:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & z \end{vmatrix} = -2\hat{e}_z$$

Auf S_1 gilt $d\vec{S} = r dr d\varphi \hat{e}_z$, und damit

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \int_{S_1} (-2\hat{e}_z) \cdot (r dr d\varphi \hat{e}_z) \\ &= -2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= -2 \frac{R^2}{2} 2\pi = -2\pi R^2 \end{aligned}$$

Auf der Fläche S_2 haben wir

$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{e}_r = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi (\cos\varphi \sin\theta \hat{e}_x + \sin\varphi \sin\theta \hat{e}_y + \cos\theta \hat{e}_z)$$

4.6. Satz von Stokes

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{S_2} \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \int_{S_2} (-2\hat{e}_z) \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi (\cos \varphi \sin \theta \hat{e}_x + \sin \varphi \sin \theta \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z) \\ &= -2R^2 \int_{S_2} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \\ &= -2R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \underbrace{\sin \theta \cos \theta}_{\frac{1}{2}(\sin^2 \theta)'} \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= -2R^2 \frac{1}{2} 2\pi = -2\pi R^2\end{aligned}$$

Ampèresches Gesetz

Für Ströme die nicht von der Zeit abhängen lautet das Ampèresche Gesetz

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (4.30)$$

Hier ist I der Strom durch die Fläche S , welche von der Kurve C begrenzt wird, und $\vec{J}$ ist die Stromdichte (die Ladung die pro Zeit und Fläche fließt).

Mit dem Satz von Stokes können wir das Kurvenintegral umschreiben,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (4.31)$$

und erhalten damit

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.32)$$

Da diese Gleichung für eine beliebige Fläche S gilt, muss auch die differentielle Form des Ampèreschen Gesetzes gelten:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (4.33)$$

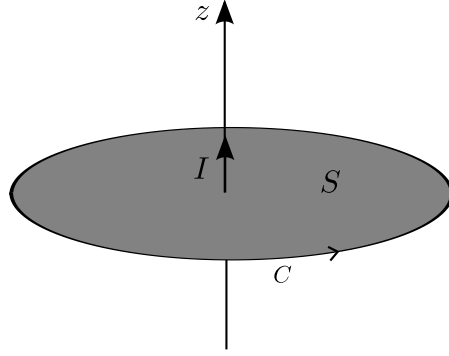
Beispiel

In Kapitel 3 hatten wir das Magnetfeld eines idealen Leiters betrachtet, der sich in z -Richtung erstreckt und von einem Strom I durchflossen wird. Es gilt

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{e}_\varphi$$

sowie $\nabla \times \vec{B} = 0$. Für $\rho > 0$ ist das konsistent mit $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, weil die Stromdichte außerhalb des Leiters Null ist.

Betrachten wir hingegen eine Fläche S die den Leiter einschließt,



so ergibt sich aus $\nabla \times \vec{B} = 0$ die inkonsistente Gleichung

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = 0 \neq \mu_0 I$$

Die Erklärung liegt in der nicht zulässigen Verwendung von $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{e}_\varphi$ im Fall $\rho = 0$. Zum einen ist die Division durch ρ nicht erlaubt, zum anderen ist die Richtung von $\hat{e}_\varphi$ nicht definiert. Mit Hilfe des Satzes von Stokes können wir auf einfache Weise das richtige Ergebnis erhalten. Dazu ersetzen wir das Integral über S durch ein Integral über C (mit $\rho > 0$). Mit [siehe Gl. (4.2)]

$$d\vec{r} = \underbrace{d\rho}_{=0} \hat{e}_\rho + \rho d\varphi \hat{e}_\varphi + \underbrace{dz}_{=0} \hat{e}_z = \rho d\varphi \hat{e}_\varphi$$

finden wir

$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{e}_\varphi \cdot \rho d\varphi \hat{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \rho d\varphi = \mu_0 I$$

4.7 Satz von Gauß

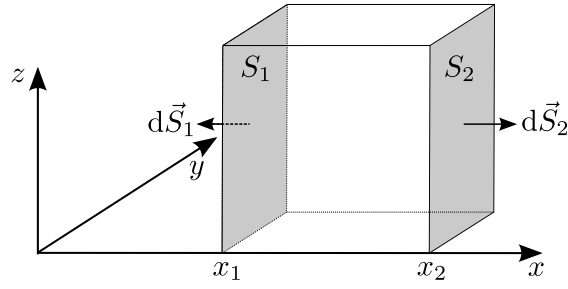
Der Satz von Stokes stellt einen Zusammenhang zwischen einem Flächenintegral und einem Integral über den Rand der Fläche (die Kurve C) dar. Der Satz von Gauß zeigt den Zusammenhang eines Volumenintegrals mit einem Integral über den Rand des Volumens (die geschlossene Fläche S) auf. Er lautet

$$\int_V \nabla \cdot \vec{w} dV = \oint_S \vec{w} \cdot d\vec{S} \quad (4.34)$$

Der Integrand auf der linken Seite entspricht der Divergenz des Vektorfeldes $\vec{w}$. Wir können die Gültigkeit des Satzes anhand eines würfelförmigen Volumens V beweisen.

Ausgeschrieben in kartesischen Koordinaten lautet das Volumenintegral

$$\int_V \nabla \cdot \vec{w} dV = \int_V \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (4.35)$$



Für das Integral über den ersten Term in der Klammer erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_V \frac{\partial w_x}{\partial x} dx dy dz &= \iint dy dz \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial w_x}{\partial x} dx \\
 &= \iint dy dz [w_x(x_2, y, z) - w_x(x_1, y, z)] \\
 &= \iint dy dz w_x(x_2, y, z) - \iint dy dz w_x(x_1, y, z) \\
 &= \int_{S_2} \vec{w} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_1} \vec{w} \cdot d\vec{S}_1
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

wobei wir $d\vec{S}_1 = -\hat{e}_x dy dz$ und $d\vec{S}_2 = \hat{e}_x dy dz$ verwendet haben. Zusammen mit dem zweiten und dem dritten Term in der Klammer in Gl. (4.35) ergibt sich Gl. (4.34)

Ein allgemeines Volumen V kann durch entsprechend viele und kleine Würfel angenähert werden. Die Summe der Volumenintegrale ergibt dann $\int_V \nabla \cdot \vec{w} dV$. In der Summe der Oberflächenintegrale heben sich die inneren Beiträge aufgrund der entgegengesetzten Richtung der Vektoren $d\vec{S}$ auf inneren Flächen auf, und es bleibt $\oint_S \vec{w} \cdot d\vec{S}$.

Beispiel

Wir verifizieren den Satz von Gauß anhand des Vektorfeldes

$$\vec{w} = y^2 z \hat{e}_x + y^3 \hat{e}_y + x z \hat{e}_z.$$

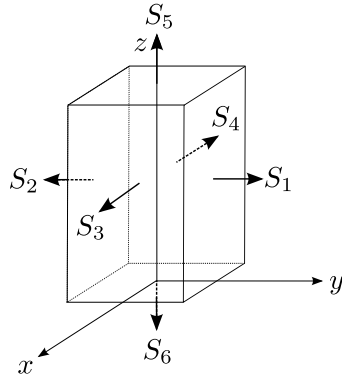
Das Integrationsvolumen sei der Würfel mit $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, und $0 \leq z \leq 2$.

Die Divergenz ist gegeben durch

$$\nabla \cdot \vec{w} = \partial_x y^2 z + \partial_y y^3 + \partial_z x z = 3y^2 + x$$

Das Volumnsintegral ist

$$\begin{aligned}
 \int_V \nabla \cdot \vec{w} dV &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz (3y^2 + x) \\
 &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy (6y^2 + 2x) \\
 &= \int_{-1}^1 dx (2y^3 + 2xy) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \int_{-1}^1 dx (4 + 4x) = 8
 \end{aligned}$$



Das Oberflächenintegral setzt sich aus den Beiträgen der sechs Flächen $S_1, \dots, S_6$ zusammen. Für den Integranden haben wir

$$\begin{aligned}
 S_1: \quad y = 1, \quad d\vec{S} &= \hat{e}_y dx dz, \quad \vec{w} \cdot d\vec{S} = (y^2 z \hat{e}_x + y^3 \hat{e}_y + xz \hat{e}_z) \cdot (\hat{e}_y dx dz) = y^3 dx dz \\
 S_2: \quad y = -1, \quad d\vec{S} &= -\hat{e}_y dx dz, \quad \vec{w} \cdot d\vec{S} = (y^2 z \hat{e}_x + y^3 \hat{e}_y + xz \hat{e}_z) \cdot (-\hat{e}_y dx dz) = -y^3 dx dz \\
 S_3: \quad x = 1, \quad d\vec{S} &= \hat{e}_x dy dz, \quad \vec{w} \cdot d\vec{S} = (y^2 z \hat{e}_x + y^3 \hat{e}_y + xz \hat{e}_z) \cdot (\hat{e}_x dy dz) = y^2 z dy dz \\
 S_4: \quad x = -1, \quad d\vec{S} &= -\hat{e}_x dy dz, \quad \vec{w} \cdot d\vec{S} = (y^2 z \hat{e}_x + y^3 \hat{e}_y + xz \hat{e}_z) \cdot (-\hat{e}_x dy dz) = -y^2 z dy dz \\
 S_5: \quad z = 2, \quad d\vec{S} &= \hat{e}_z dx dy, \quad \vec{w} \cdot d\vec{S} = (y^2 z \hat{e}_x + y^3 \hat{e}_y + xz \hat{e}_z) \cdot (\hat{e}_z dx dy) = xz dx dy \\
 S_6: \quad z = 0, \quad d\vec{S} &= -\hat{e}_z dx dy, \quad \vec{w} \cdot d\vec{S} = (y^2 z \hat{e}_x + y^3 \hat{e}_y + xz \hat{e}_z) \cdot (-\hat{e}_z dx dy) = -xz dx dy
 \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
 \oint_S \vec{w} \cdot d\vec{S} &= \sum_{i=1}^6 \int_{S_i} \vec{w} \cdot d\vec{S} \\
 &= \underbrace{\int_{-1}^1 dx \int_0^2 dz (1^3)}_{S_1} + \underbrace{\int_{-1}^1 dx \int_0^2 dz (-(-1)^3)}_{S_2} + \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz (y^2 z)}_{S_3} \\
 &\quad + \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz (-y^2 z)}_{S_4} + \underbrace{\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy (2x)}_{S_5} + \underbrace{\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy (0)}_{S_6}
 \end{aligned}$$

Die Integrale über S_3 und S_4 ergeben zusammen Null, ebenso liefern die Integrale über S_5 und S_6 Null. Damit bleibt noch

$$\oint_S \vec{w} \cdot d\vec{S} = 2 \int_{-1}^1 dx \int_0^2 dz = 8$$

in Übereinstimmung mit dem Satz von Gauß.

Gaußsches Gesetz

Mit Hilfe des Satzes von Gauß lässt sich eine differentielle Form des Gaußschen Gesetzes

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (4.37)$$

ableiten. Mit

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \quad (4.38)$$

erhalten wir

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (4.39)$$

Da das Volumen beliebig gewählt werden kann, muss gelten

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (4.40)$$

Teilchenzahlerhaltung in einer strömenden Flüssigkeit

Wir betrachten eine strömende Flüssigkeit beschrieben durch die (Massen-)Dichte $\rho(\vec{r}, t)$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t) = n\vec{v}$. Da wir voraussetzen dass keine Teilchen erzeugt oder vernichtet werden können (Massenerhaltung), gilt für ein Volumen V mit Oberfläche S

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4.41)$$

Die zeitliche Änderung der Teilchenzahl oder Masse in V , gegeben durch $\int_V \rho dV$, entspricht dem Teilchenfluss durch S , gegeben durch $-\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$. Das Minuszeichen ist notwendig weil $d\vec{S}$ per Konvention nach außen zeigt, also entgegen einer Strömung in das Volumen V welche zu einer Vergrößerung der Teilchenzahl führt.

Der Satz von Gauß liefert

$$-\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV \quad (4.42)$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV \quad (4.43)$$

Daraus erhalten wir die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\nabla \cdot \vec{j} \quad (4.44)$$

5 Fouriertransformation

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Fourierreihen, Fourierintegralen und der Fouriertransformation. Alle drei Begriffe bezeichnen die Darstellung von Funktionen in einer Basis von periodischen Funktionen (sin, cos, komplexe Exponentialfunktion) mit vielfältigen mathematischen, physikalischen und technischen Anwendungen.

5.1 Fourierreihen

Wir definieren eine periodische Funktion mit der Periode p durch die Eigenschaft

$$f(x + p) = f(x) \quad (5.1)$$

Dabei setzen wir voraus, dass $f(x)$ für alle reellen x definiert ist. Vertraute periodische Funktionen sind $\sin(x)$ und $\cos(x)$ (mit Periode $p = 2\pi$), oder auch die konstante Funktion $f(x) = c$ (p beliebig). Im Bereich der Physik treten periodische Funktionen z. B. in der Form der Auslenkung einer schwingenden Saite auf ($f(x) = 0$ an den beiden Endpunkten), oder in der Form des elektrischen Potentials in einem Kristallgitter [$U(\vec{r} + \vec{R}) = U(\vec{r})$; $\vec{R}$ ist ein Gittervektor].

Wenn f die Periode p hat, dann gilt auch

$$f(x + np) = f(x) \quad (5.2)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir zunächst Funktionen mit der Periode 2π . Solche Funktionen lassen sich mit Hilfe der Funktionen

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots \quad (5.3)$$

in der Form einer sogenannten trigonometrischen Reihe darstellen:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.4)$$

Wir nehmen an, dass die Reihe konvergiert, und die Summe $f(x)$ hat. Die Bedingungen dafür diskutieren wir später. Zunächst wollen wir herausfinden, wie die Koeffizienten a_n , b_n bestimmt werden können.

5.1. Fourierreihen

Um die Formeln für a_n und b_n abzuleiten, stellen wir zunächst fest, dass die Funktionen

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots \quad (5.5)$$

auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ orthogonal sind ($m, n > 0$):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \pi \delta_{mn} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \pi \delta_{mn} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

(Diese Beziehungen folgen aus $\int_{-\pi}^{\pi} dx e^{inx} = 2\pi \delta_{n,0}$.)

Indem wir auf beiden Seiten integrieren erhalten wir aus Gl. (5.4)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx \quad (5.7)$$

Unter der Annahme, dass wir die Summe und das Integral vertauschen dürfen, folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) \quad (5.8)$$

Der erste Term ergibt $2\pi a_0$, während die anderen Terme alle verschwinden. Daraus folgt

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (5.9)$$

Um a_n zu bestimmen, multiplizieren wir Gl. (5.4) mit $\cos mx$ ($m > 0$), und vertauschen Integration und Summation:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx \quad (5.10)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \right) \quad (5.11)$$

Das erste Integral (mit a_0) ist Null. Von den anderen gibt nur $a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx$ für $n = m$ einen Beitrag, der laut Gl. (5.6) $a_n \pi$ ist. Daraus folgt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Die Koeffizienten b_n erfolgen aus der Multiplikation von Gl. (5.4) mit $\sin nx$ und anschließender Integration:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

Eine Reihe der Form

$$S(x) = a_0 + \sum_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.14)$$

mit Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (5.15)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (5.16)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (5.17)$$

nennt man eine Fourierreihe. Wenn die Reihe konvergiert und die Summe gleich der Funktion $f(x)$ ist, schreiben wir

$$f(x) = a_0 + \sum_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5.18)$$

Bezüglich der Konvergenz von Fourierreihen gilt:

- Ist $f(x)$ periodisch mit Periode 2π , stückweise stetig im Intervall $[-\pi, \pi]$ und besitzt an jedem Punkt in $[-\pi, \pi]$ eine links- und rechtsseitige Ableitung, dann konvergiert die Fourierreihe.

Die Funktion $f(x)$ ist stetig im Punkt x_0 wenn gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 - h) = f_-(x_0) = f_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h) \quad (5.19)$$

Die links- und rechtsseitige Ableitung am Punkt x_0 sind definiert als die Grenzwerte

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (5.20)$$

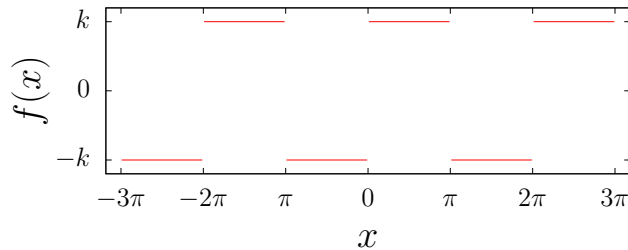
- Die Fourierreihe konvergiert gegen den Wert $f(x)$ an allen Punkten an denen $f(x)$ stetig ist.
- An Punkten in denen $f(x)$ unstetig ist, konvergiert die Reihe gegen den Mittelwert der rechts- und linksseitigen Werte von f ,

$$S(x_0) = \frac{1}{2} [f_+(x_0) + f_-(x_0)] \quad (5.21)$$

Beispiel

Wir definieren die 2π -periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ +k, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$



Nachdem sich die Integrale in den Formeln für a_n, b_n nicht durch den Wert von $f(x)$ an einzelnen Punkten ändern, ist eine Festlegung an den Punkten $0, \pm\pi$ nicht erforderlich.

Wir finden

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) dx + \int_0^{\pi} k dx \right] = \frac{1}{2\pi} \left[-k \int_{-\pi}^0 dx + k \int_0^{\pi} dx \right] = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-k \int_{-\pi}^0 \cos nx dx + k \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \\ &= \frac{k}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

weil $\sin(0) = \sin(\pm\pi) = 0$, und

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-k \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + k \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{k}{\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{k}{n\pi} [\cos(0) - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + \cos(0)] \\ &= \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

Mit den Beziehungen

$$\cos n\pi = \begin{cases} -1, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 1, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}, \quad 1 - \cos n\pi = \begin{cases} 2, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

erhalten wir die Koeffizienten

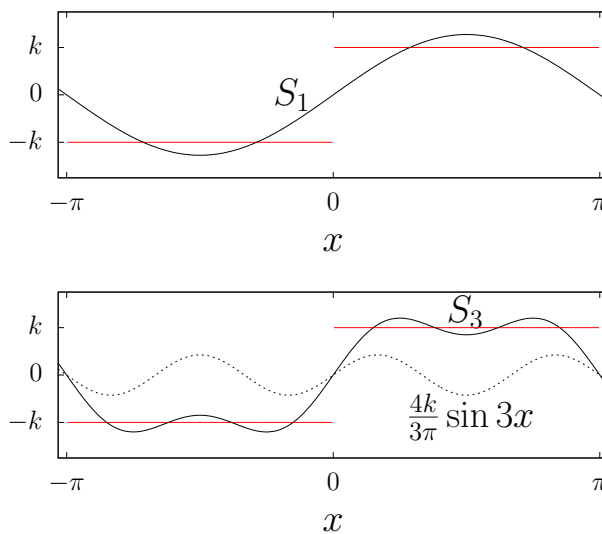
$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \quad \dots$$

und für die Fourierreihe:

$$S(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

Die ersten beiden Partialsummen sind

$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x, \quad S_3 = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$$



- Schon anhand von S_1 und S_3 ist die Konvergenz der Fourierreihe qualitativ zu erkennen. Insbesondere bilden die Koeffizienten b_n wegen $|\sin x| \leq 1$ eine Nullfolge.
- An der Unstetigkeitsstelle $x = 0$ haben die Partialsummen (und die Fourierreihe) den Wert $\frac{1}{2}[f_+(x_0) + f_-(x_0)] = [k + (-k)] = 0$. Auch für beliebig große Werte von N zeigt S_N an Unstetigkeitsstellen sogenannte Gibbs-Oszillationen (siehe Wikipedia).
- Wenn wir die Funktion f am Punkt $x = \pi/2$ betrachten, erhalten wir ($\sin \pi/2 = 1$, $\sin 3\pi/2 = -1$, $\dots$)

$$f(\pi/2) = k = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right)$$

und somit die erstaunliche Beziehung

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

welche von Leibniz 1673 geometrisch entdeckt wurde.

Gerade und ungerade Funktionen

- Für gerade Funktionen mit der Eigenschaft $f(-x) = f(x)$ gilt $b_n = 0$.
- Für ungerade Funktionen, $f(-x) = -f(x)$ gilt $a_n = 0$.

Approximation von periodischen Funktionen

Wir definieren die quadratische Abweichung zwischen zwei periodischen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ als

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F_N)^2 dx \quad (5.22)$$

Es sei F_N ein trigonometrisches Polynom der Ordnung N ,

$$F_N(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (5.23)$$

Dann kann man zeigen dass E minimal ist wenn $A_n = a_n$ und $B_n = b_n$, also gleich den Koeffizienten der Fourierreihe von $f(x)$. Für gegebenes N stellt die Partialsumme $S_N(x)$ der Fourierreihe von f die beste Näherung der Funktion f dar.

Komplexe Fourierreihen

Mit Hilfe der Formel

$$e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx \quad (5.24)$$

erhalten wir die bekannten Beziehungen

$$\cos nx = \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) \quad (5.25)$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) \quad (5.26)$$

Damit folgt

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = a_n \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) - b_n \frac{i}{2} (e^{inx} - e^{-inx}) \quad (5.27)$$

$$= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inx} \quad (5.28)$$

Mit¹

$$a_0 = c_0, \quad \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = c_n, \quad \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = c_{-n} = c_n^* \quad (5.29)$$

erhalten wir die komplexe Fourierreihe

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}} \quad (5.30)$$

¹Man beachte: $a_{-n} = a_n$, $b_{-n} = -b_n$, vgl. Gl. (5.15) – Gl. (5.17).

mit den Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [\cos nx - i \sin nx] dx \quad (5.31)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx} \quad (5.32)$$

Interpretation als Basistransformation

In Kapitel 2 hatten wir Koordinatensysteme und Basistransformationen betrachtet. Insbesondere konnten wir einen Vektor $\vec{v}$ bezüglich einer orthogonalen Basis in der Form

$$\vec{v} = \sum_i v_i \hat{e}_i \quad (5.33)$$

darstellen, mit den Komponenten

$$v_i = \vec{v} \cdot \hat{e}_i. \quad (5.34)$$

Für Funktionen mit Periode 2π kann man ein Skalarprodukt durch

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) g^*(x) \quad (5.35)$$

definieren. Mit

$$\phi_n(x) = e^{inx} \quad (5.36)$$

und

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \phi_n^*(x) = \langle f|\phi_n \rangle \quad (5.37)$$

erhalten wir statt Gl. (5.30) die Darstellung

$$f(x) = \sum_n f_n \phi_n(x), \quad f_n = \langle f|\phi_n \rangle \quad (5.38)$$

Die Fourierreihe von $f(x)$ kann also als eine Darstellung der Funktion $f(x)$ in der (abzählbar unendlichdimensionalen) Basis $\{\phi_n\}$ verstanden werden.

Die Funktionen $\{\phi_n\}$ sind (wie weiter oben $\sin nx, \cos nx$) orthonormal:

$$\langle \phi_n|\phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{inx} e^{-inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1 \quad (5.39)$$

Für $n - m = l \neq 0$ erhalten wir

$$\langle \phi_n|\phi_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx e^{inx} e^{-imx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{il} e^{ilx} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{l} \sin l\pi = 0 \quad (5.40)$$

Funktionen mit Periode $2L$

Um die Fourierdarstellung einer Funktion mit allgemeiner Periode $2L$,

$$f(x + 2L) = f(x) \quad (5.41)$$

zu erhalten, stellen wir fest, dass die Funktion $g(x) = f(xL/\pi)$ die Periode 2π hat, $g(x + 2\pi) = g(x)$. Z. B. hat $f(x) = \sin 2x$ die Periode $2L = \pi$ (oder $L = \pi/2$), und

$$g(x) = \sin\left(2x \frac{L}{\pi}\right) = \sin\left(2x \frac{\pi/2}{\pi}\right) = \sin x \quad (5.42)$$

hat Periode $2L = 2\pi$. Für $f(xL/\pi)$ mit Periode 2π können wir die Fourierreihendarstellung angeben:

$$\begin{aligned} f(xL/\pi) &= \sum_n c_n e^{inx} \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(xL/\pi) e^{-inx} dx \end{aligned} \quad (5.43)$$

Um daraus die Fourierreihendarstellung der ursprünglichen Funktion $f(x)$ mit Periode $2L$ abzuleiten, verwenden wir die Substitution

$$\frac{xL}{\pi} \mapsto \bar{x}, \quad x \mapsto \frac{\pi \bar{x}}{L}, \quad dx \mapsto \frac{\pi}{L} d\bar{x}. \quad (5.44)$$

Das Einsetzen in Gl. (5.43) und die Umbenennung von $\bar{x}$ in x liefert

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx\pi/L}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-inx\pi/L} dx$$

5.2 Fourierintegrale

Bisher haben wir periodische Funktionen mit einer Periode 2π bzw. $2L$ betrachtet. Im letzteren Fall haben wir die Fourierreihendarstellung

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx\pi/L} \quad (5.45)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-inx\pi/L} dx \quad (5.46)$$

Mit $\omega_n = n\pi/L$ interpretieren wir die Gleichung

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ix\omega_n} \quad (5.47)$$

als Überlagerung von Schwingungen mit Frequenz ω_n und Amplitude c_n .

Die Darstellung einer Funktion durch Fourierkomponenten $e^{ix\omega_n}$ kann auf nichtperiodische Funktionen erweitert werden. Dazu betrachten wir eine periodische Funktion auf dem Intervall $[-L, L]$, und nehmen dann den Limes $L \rightarrow \infty$. In diesem Fall erhalten wir statt diskreter Frequenzen ω_n eine kontinuierliche Variable,

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \mapsto \omega \in [-\infty, \infty] \quad (5.48)$$

Wir erhalten für gegebenes L durch Einsetzen von c_n (unterscheide x und x')

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} e^{i\omega_n x} \int_{-L}^L f(x') e^{-i\omega_n x'} dx' \quad (5.49)$$

Der Abstand zwischen benachbarten Frequenzen ω_n ist gegeben durch

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \Delta\omega = \frac{\pi}{L} \quad (5.50)$$

und somit gilt

$$\frac{1}{2L} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{L} = \frac{1}{2\pi} \Delta\omega \quad (5.51)$$

sowie

$$f_L(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega e^{i\omega_n x} \int_{-L}^L f(x') e^{-i\omega_n x'} dx' \quad (5.52)$$

Im Limes $L \rightarrow \infty$ ($\Delta\omega \rightarrow 0$) können wir die Ersetzungen $\sum_n \Delta\omega \mapsto \int d\omega$ und $\omega_n \mapsto \omega$ vornehmen, und erhalten

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-i\omega x'} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C(\omega) e^{i\omega x} \quad (5.53)$$

mit

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-i\omega x'} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i\omega x}. \quad (5.54)$$

Insgesamt haben wir also die Darstellung

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega C(\omega) e^{i\omega x}, \quad C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i\omega x}}. \quad (5.55)$$

Das bedeutet, dass eine nichtperiodische Funktion im Allgemeinen als die Summe von unendlich vielen Beiträgen mit Frequenz ω gegeben ist, wobei das Gewicht jeder Frequenz durch die Funktion $C(\omega)$ beschrieben wird. Eine Darstellung der Funktion $f(x)$ in der Form von Gl. (5.54) nennt man ein Fourierintegral.

5.3 Fouriertransformation

Die Darstellung von Funktionen mit Hilfe von Fourierintegralen spielt eine zentrale Rolle bei der Lösung von Differentialgleichungen. Die Amplitudenfunktion $C(\omega)$ ist durch $f(x)$ festgelegt ist. Wir verwenden von nun an die Notation $C(\omega) = \tilde{f}(\omega)/\sqrt{2\pi}$, und erhalten

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} \quad (5.56)$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i\omega x} \quad (5.57)$$

Die Integraltransformation zwischen $f(x)$ und $\tilde{f}(\omega)$ ist eine bijektive Abbildung, welche als Fouriertransformation bezeichnet wird; $\tilde{f}(\omega)$ heißt die Fouriertransformierte von $f(x)$ (und umgekehrt), und wird in der Literatur auch mit $F(\omega)$ oder $\hat{f}(\omega)$ bezeichnet. In dem wir die Abbildung $f(x) \mapsto \tilde{f}(\omega)$ mit $\mathcal{F}$ bezeichnen, haben wir den Zusammenhang

$$\mathcal{F}[f(x)] = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i\omega x} \quad (5.58)$$

Die inverse Abbildung lautet entsprechend

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(\omega)] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} \quad (5.59)$$

Existenzbedingungen: $\tilde{f}(\omega)$ existiert wenn $f(x)$ auf jedem endlichen Intervall stückweise stetig ist, und $f(x)$ absolut integrierbar auf der reellen Achse ist, also $\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty$.

In der Physik tritt die Fouriertransformation typischerweise als Transformation zwischen der Zeit t und der Frequenz ω auf, $\mathcal{F}[f(t)] = \tilde{f}(\omega)$, oder als Transformation zwischen einer Ortsvariablen x und dem Impuls p , $\mathcal{F}[f(x)] = \tilde{f}(p)$. Im ersten Fall entspricht

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \quad (5.60)$$

der Darstellung des zeitlichen Vorgangs $f(t)$ als kontinuierliche Überlagerung von Schwingungen mit Kreisfrequenz ω und Amplitude $\tilde{f}(\omega)$.

Beispiel

Für den Rechteckimpuls, beschrieben durch die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -a \leq t \leq a \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ergibt die Fouriertransformation

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a dt e^{-i\omega t}$$

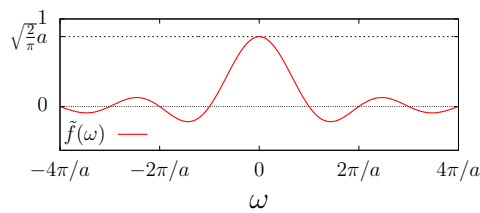
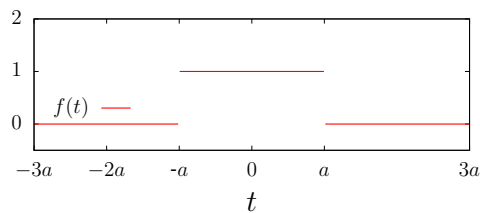
Wir unterscheiden die Fälle $\omega = 0$ und $\omega \neq 0$:

$$\tilde{f}(\omega = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a dt = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\tilde{f}(\omega \neq 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a dt e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\omega} \sin \omega a$$

Die Fouriertransformierte ist also

$$\tilde{f}(\omega) = \begin{cases} \frac{2 \sin \omega a}{\omega \sqrt{2\pi}}, & \omega \neq 0 \\ \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}, & \omega = 0 \end{cases}$$



Beispiel

Eine gedämpfte Schwingung kann durch

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t} e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

beschrieben werden, mit λ, ω_0 reell und positiv. Fouriertransformation ergibt

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{-[\lambda + i(\omega - \omega_0)]t} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-[\lambda + i(\omega - \omega_0)]t}}{\lambda + i(\omega - \omega_0)} \Big|_0^{\infty}$$

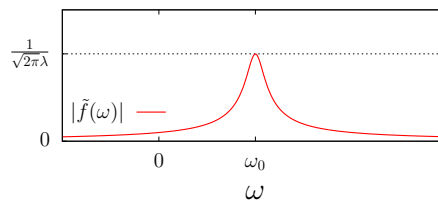
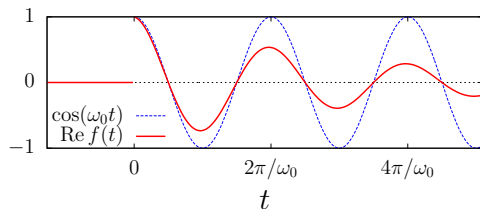
Aufgrund des Faktors $e^{-\lambda t}$ liefert nur die untere Integrationsgrenze einen Beitrag, und wir finden

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda + i(\omega - \omega_0)}$$

Der Betrag der Amplitude ist gegeben durch

$$|\tilde{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + (\omega - \omega_0)^2}}$$

Diese Funktion hat ein Maximum $1/(\sqrt{2\pi}\lambda)$ an der Stelle $\omega = \omega_0$, welches umso schmaler und höher ist je kleiner die Dämpfung λ ist.



Diracsche Deltafunktion

Wir betrachten die sogenannte Cauchy-Lorentz-Verteilung

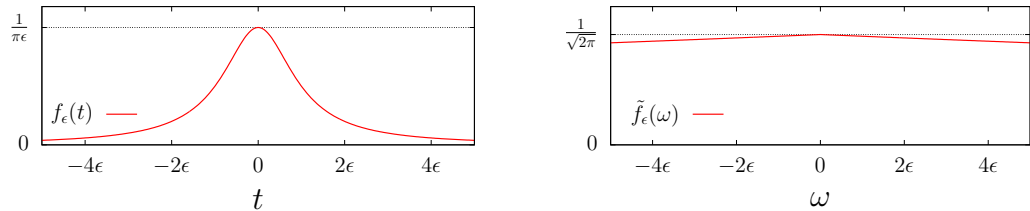
$$f_\epsilon(t) = \frac{\epsilon}{\pi(\epsilon^2 + t^2)} \quad (5.61)$$

deren Fouriertransformation durch

$$\tilde{f}_\epsilon(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\epsilon|\omega|} \quad (5.62)$$

gegeben ist (der Beweis erfordert Kenntnisse der Funktionentheorie). $\tilde{f}_\epsilon(\omega)$ wird für $\epsilon \rightarrow 0$ immer flacher, und es gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{f}_\epsilon(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (5.63)$$



Eine konstante Amplitudenfunktion beschreibt einen zeitlichen Vorgang der sich zu gleichen Anteilen aus allen Frequenzen zusammensetzt. In der Physik und Technik spricht man von weißem Rauschen (white noise).

Eine interessante Frage ist, was die Fouriertransformierte des weißen Rauschens ist, bzw. was sich aus dem Grenzübergang

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(t) \quad (5.64)$$

ergibt. Die Funktion $f_\epsilon(t)$ weist für $\epsilon \rightarrow 0$ ein immer schärferes Maximum bei $t = 0$ auf, und fällt für $t \neq 0$ immer stärker ab. Formal ergibt sich

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (5.65)$$

Aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)} dt = 1 \quad (5.66)$$

(das folgt mit Hilfe von $\arctan x = \int (1+x^2)^{-1} dx$ und $\arctan \pm\infty = \pm\pi/2$) haben wir außerdem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(t) dt = 1 \quad (5.67)$$

Die Beziehungen (5.65) und (5.67) sind genau die Eigenschaften der Diracschen Deltafunktion $\delta(x)$, und wir haben deshalb

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(t) = \delta(t) \quad (5.68)$$

Streng genommen ist $\delta(t)$ keine klassische Funktion. Die Deltafunktion kann aber im Rahmen der Theorie der Distributionen streng mathematisch definiert werden.

Physikalisch ist interessant, dass $\delta(t)$ die Fouriertransformierte von $\tilde{f}(\omega) = \text{const.}$ ist:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_\epsilon(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} d\omega \quad (5.69)$$

Es gilt also

$$\sqrt{2\pi} \delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1] \quad (5.70)$$

Weiters haben wir die Darstellung der Deltafunktion

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (5.71)$$

Eigenschaften der Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ist eine lineare Abbildung,

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathcal{F}[f(x)] + \beta \mathcal{F}[g(x)] = \alpha \tilde{f}(\omega) + \beta \tilde{g}(\omega) \quad (5.72)$$

was direkt aus der Linearität des Integrals folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] e^{-i\omega x} dx &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Die Fouriertransformierte der Ableitung von $f(x)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f'(x) e^{-i\omega x} \quad (5.74)$$

Partielle Integration liefert

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i\omega x} \right] \quad (5.75)$$

Da $f(x)$ absolut integrierbar sein soll, verschwindet der erste Term, und wir haben

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega \mathcal{F}[f(x)] \quad (5.76)$$

5.3. Fouriertransformation

Für die zweite Ableitung ergibt sich analog

$$\mathcal{F}[f''(x)] = -\omega^2 \mathcal{F}[f(x)] \quad (5.77)$$

Durch Fouriertransformation kann man also Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen überführen.

Die Faltung bzw. das Faltungsintegral zweier Funktionen ist definiert als

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)dp \quad (5.78)$$

Für die Fouriertransformierte von $h(x)$ finden wir

$$\mathcal{F}[f * g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dp f(p)g(x-p)}_{(f*g)(x)} e^{-i\omega x} \quad (5.79)$$

Mit der Substitution $x - p \rightarrow q$, $dx \rightarrow dq$ erhalten wir

$$\mathcal{F}[f * g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p)g(q)e^{-i\omega(p+q)} \quad (5.80)$$

Dieses Integral lässt sich als Produkt von zwei Integralen schreiben,

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p)e^{-i\omega p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq g(q)e^{-i\omega q} \quad (5.81)$$

und somit gilt

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g] \quad (5.82)$$

Aus der Faltung von $f(x)$ und $g(x)$ wird nach der Fouriertransformation also einfach eine Multiplikation von $f(\omega)$ und $\tilde{g}(\omega)$.

6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen in denen nicht nur eine Funktion selbst sondern auch ihre Ableitungen vorkommen. Im einfachsten Fall gibt es eine unabhängige Variable und eine gesuchte Funktion dieser Variablen. Differentialgleichungen sind allgegenwärtig in der Physik, weil sie die zeitliche und räumliche Abhängigkeit von physikalischen Größen beschreiben.

Bespiele aus der Physik:

- Newtonsches Gesetz in einer Dimension:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \quad (6.1)$$

- Newtonsches Gesetz in Vektorform:

$$m\ddot{\vec{r}} = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (6.2)$$

- Laplacegleichung (Wärmeleitung, Elektrostatik):

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.3)$$

Das Gebiet der Differentialgleichungen ist extrem breit und wir werden im Folgenden nur einige Aspekte davon kennenlernen. Insbesondere würde eine systematische Diskussion der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen den Rahmen dieser Veranstaltung sprengen.

In diesem Kapitel widmen wir uns den sogenannten gewöhnlichen Differentialgleichungen. Dabei handelt es sich um Differentialgleichungen mit nur einer unabhängigen Variablen. Im Gegensatz dazu treten in partiellen Differentialgleichungen mehrere unabhängige Variable und entsprechende partielle Ableitungen auf.

6.1 Differentialgleichungen erster Ordnung

Die einfachsten gewöhnlichen Differentialgleichungen sind jene in denen nur die erste Ableitung $y'(x)$ vorkommt. Solche Gleichungen nennt man Differentialgleichungen erster

6.1. Differentialgleichungen erster Ordnung

Ordnung. Zwei Beispiele sind

$$y' = \cos x \quad (6.4)$$

$$y' + y = 0 \quad (6.5)$$

Wir können eine gewöhnliche DGL erster Ordnung auch in der Form

$$F(x, y, y') = 0 \quad (6.6)$$

oder als

$$y' = f(x, y) \quad (6.7)$$

schreiben. Unter der Lösung einer solchen DGL auf einem Intervall $a < x < b$ verstehen wir eine Funktion $h(x)$ mit Ableitung $h'(x)$, welche nach Einsetzen von h für y und h' für y' in die DGL eine wahre Aussage liefert.

Beispiel

Die Funktion $h(x) = e^x$ ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' - y = 0$:

$$h'(x) - h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Beispiel

Die Funktion $h(x) = x^2$ ist eine Lösung der Differentialgleichung $xy' = 2y$:

$$xh'(x) = 2h(x) \quad \Leftrightarrow \quad x(2x) = 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2x^2$$

Aufgrund des Auftretens von Ableitungen haben Differentialgleichungen in der Regel nicht eine sondern viele Lösungen, welche sich durch den Wert von multiplikativen oder additiven Konstanten unterscheiden; die Ableitungen dieser Konstanten sind Null.

Beispiel

Die Lösungen der Differentialgleichung $y' = \cos x$ haben die Form $y = \sin x + C$ da $(\sin x + C)' = \cos x$. Für jede Wahl von C ergibt sich eine anderen Lösung, welche einer Kurve $y_C(x)$ entspricht. Gemeinsam bilden diese Kurven die Lösungsschar der DGL.

Eine Lösung die unbestimmte Konstanten enthält nennt man eine allgemeine Lösung (z. B. $y = \sin x + C$). Durch Wahl des Wertes von C ergibt sich daraus eine spezielle oder partikuläre Lösung (z. B. $y = \sin x$).

Beispiel

Wir betrachten den Zerfall einer radioaktiven Substanz. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei eine Menge von 5g vorhanden. Wir wollen wissen, wie die Menge y der Substanz als Funktion der Zeit abnimmt und suchen deshalb $y(t)$ mit $y(0) = 5$. Die Beobachtung zeigt, dass die Änderung (Zerfallsrate) proportional zur vorhandenen Menge ist, also

$$y'(t) = -\lambda y(t)$$

Die sogenannte Zerfallskonstante $\lambda > 0$ ist eine Eigenschaft der jeweiligen Substanz.

Unser Wissen über die Ableitung der Exponentialfunktion, $(e^{-\alpha x})' = -\alpha e^{-\alpha x}$ legt die folgende, allgemeine Lösung nahe:

$$y = Ce^{-\lambda t}$$

Eine spezielle Lösung ohne wählbare Konstanten ergibt sich mit Hilfe der Bedingung $y(0) = 5$. Aus der allgemeinen Lösung ergibt sich dann

$$y(0) = Ce^0 = C \Rightarrow C = y(0) = 5$$

und somit

$$y = 5e^{-\lambda t}$$

Die Richtigkeit der Lösung kann und sollte durch Einsetzen in die DGL geprüft werden:

$$y' = -5\lambda e^{-\lambda t} = -\lambda y, \quad y(0) = 5e^0 = 5$$

Die Kombination aus einer DGL (z. B. $y' = \lambda y$) und einer Anfangsbedingung ($y(0) = 5$) nennt man ein Anfangswertproblem. Die allgemeine Form lautet

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (6.8)$$

Gerade in der Physik hat man es in der Regel mit der Kombination aus einer DGL und Anfangswerten (oder auch Randwerten) zu tun, welche sich aus einer konkreten Fragestellung ergeben.

6.1.1 Separierbare Differentialgleichungen

In vielen Fällen kann eine Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x, y) = f(x)/g(y)$ in die Form

$$g(y)y' = f(x) \quad (6.9)$$

gebracht werden. Indem wir die Ableitung als $y' = dy/dx$ schreiben, erhalten wir formal

$$g(y)dy = f(x)dx \quad (6.10)$$

Da die linke Seite nur von y abhängt und die rechte Seite nur von x , nennt man eine solche Differentialgleichung separierbar. Integration von Gl. (6.9) nach x auf beiden Seiten liefert

$$\int g(y(x)) \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx + C \quad (6.11)$$

6.1. Differentialgleichungen erster Ordnung

Indem wir auf der linken Seite die Integrationsvariable auf y ändern $[(dy/dx)dx = dy]$, erhalten wir

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C \quad (6.12)$$

Die Integrale existieren wenn f und g stetige Funktionen sind und ergeben eine allgemeine Lösung (man beachte die Konstante C) der DGL in Gl. (6.9).

Beispiel

Die DGL $y' = 1 + y^2$ kann separiert werden:

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx$$

Integration auf beiden Seiten liefert

$$\arctan y = x + C$$

bzw.

$$y = \tan(x + C)$$

Wichtig: die Integrationskonstante muss unmittelbar nach der Integration eingeführt werden. Die Funktion $y = \tan x + C$ ist keine Lösung.

Beispiel

Mit der Separationsmethode können wir die DGL des radioaktiven Zerfalls lösen. Unter der Annahme dass $y \geq 0$ (Menge der Substanz) gilt

$$y' = -\lambda t \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\lambda dt \Rightarrow \ln y = -\lambda t + C'$$

Anwenden der Exponentialfunktion liefert die allgemeine Lösung

$$y = e^{-\lambda t + C'} = e^{-\lambda t} \underbrace{e^{C'}}_C = Ce^{-\lambda t}$$

Wenn eine Differentialgleichung nicht separierbar ist, aber z. B. die Form

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6.13)$$

hat, kann daraus durch die Variablensubstitution $y/x = u$ eine separierbare DGL erhalten werden. Die Substitution ergibt mit

$$y = ux, \quad y' = u'x + u \quad (6.14)$$

eine DGL der Form

$$u'x = g(u) - u \quad (6.15)$$

welche separierbar ist:

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad (6.16)$$

Beispiel

Wir betrachten die DGL

$$y' = \frac{x}{\sin(\frac{y}{x})} + \frac{y}{x}$$

Einsetzen von $y' = u'x + u$ auf der linken Seite und $y/x = u$ auf der rechten Seite ergibt

$$u'x + u = \frac{x}{\sin u} + u$$

und nach Umformen

$$du \sin u = dx$$

Nach Integration erhalten wir

$$-\cos u = x + C'$$

und damit

$$u = \arccos(-x + C)$$

Die Lösung $y(x)$ der ursprünglichen DGL erhalten wir durch Rückeinsetzen:

$$y = x \arccos(-x + C)$$

6.1.2 Exakte Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung heißt exakt, wenn sie die Form

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (6.17)$$

hat, und die Funktionen $M(x, y)$, $N(x, y)$ die Ableitungen einer Funktion $u(x, y)$ sind:

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.18)$$

Die Bezeichnung exakt kommt daher, dass in diesem Fall die Differentialgleichung einem exakten Differential der Funktion u entspricht:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du = 0 \quad (6.19)$$

Die allgemeine Lösung der DGL $du = 0$ ist durch Integration bestimmbar:

$$u(x, y) = C \quad (6.20)$$

6.1. Differentialgleichungen erster Ordnung

Um zu prüfen ob eine gegebene DGL exakt ist, können wir ausnutzen, dass die zweiten Ableitungen einer stetigen Funktion folgende Bedingung erfüllen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad (6.21)$$

Daraus folgt die notwendige und hinreichende Bedingung für eine exakte Differentialgleichung:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (6.22)$$

Partielle Ableitungen schreiben wir im Folgenden auch in der Form $\partial_x u \equiv u_x$, etc.

Um die Lösung zu bestimmen integrieren wir die Gl. $\partial u / \partial x = M(x, y)$ nach x und behandeln y dabei als konstant:

$$u = \int M dx + k(y) \quad (6.23)$$

Die unbekannte Funktion $k(y)$ bestimmen wir durch Ableiten der rechten Seite nach y und Gleichsetzen mit $N(x, y) = \partial u / \partial y$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M dx + \frac{dk}{dy} = N(x, y) \quad (6.24)$$

Durch eine weitere Integration erhalten wir $k(y)$ und damit $u(x, y)$.

Beispiel

Die Differentialgleichung

$$\underbrace{(2xy + y^2)}_M dx + \underbrace{(x^2 + 2yx + 1)}_N dy = 0$$

ist exakt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \partial_y(2xy + y^2) &&= 2x + 2y \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \partial_x(x^2 + 2yx + 1) &&= 2x + 2y \end{aligned}$$

Um $u(x, y)$ zu bestimmen, integrieren wir die Gleichung $u_x = M$ nach x :

$$u = \int dx M = \int dx(2xy + y^2) = x^2 y + y^2 x + k(y)$$

Dann leiten wir das Resultat nach y ab um u_y zu erhalten, und setzen es gleich N :

$$\partial_y[x^2 y + y^2 x + k(y)] = x^2 + 2xy + \frac{dk(y)}{dy} = u_y \stackrel{!}{=} N(x) = x^2 + 2yx + 1$$

Das ergibt die Differentialgleichung

$$x^2 + 2xy + \frac{dk(y)}{dy} = x^2 + 2yx + 1$$

bzw.

$$\frac{dk(y)}{dy} = 1$$

mit der Lösung $k(y) = y$. Insgesamt ergibt sich die implizite Lösung

$$u(x, y) = x^2y + y^2x + y = C$$

Differentiation ergibt wieder die DGL $du = 0$, und bestätigt die Richtigkeit der Lösung:

$$\begin{aligned}(x^2y + y^2x + y)' &= 2xy + x^2y' + 2yy'x + y^2 + y' = (x^2 + 2yx + 1)y' + (2xy + y^2) = 0 \\ (2xy + y^2)dx + (x^2 + 2yx + 1)dy &= 0\end{aligned}$$

Wenn eine Differentialgleichung nicht exakt ist, besteht in vielen Fällen die Möglichkeit, sie mit Hilfe eines sogenannten integrierenden Faktors exakt zu machen. Dazu gehen wir von einer DGL der Form

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (6.25)$$

aus, die nicht exakt ist, also $P_y \neq Q_x$. Nun wollen wir eine Funktion F finden, die im allgemeinen von x und y abhängt und folgendes leistet: nach Multiplikation der DGL mit F erhalten wir eine exakte DGL, welche nach der oben beschriebenen Methode gelöst werden kann. Die Multiplikation mit F erfolgt auf beiden Seiten der DGL, und verändert deshalb die Lösung nicht.

Beispiel

Die DGL

$$ydx - xdy = 0$$

ist nicht exakt weil $P_y = 1$ aber $Q_x = -1$. Multiplikation mit $F = 1/x^2$ ergibt

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$$

Da

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{-1}{x} = \frac{1}{x^2}$$

ist die so erhaltene DGL exakt. Die Lösung erhalten wir sofort aus

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = d\left(-\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = Cx$$

Dieselbe Antwort erhalten wir in diesem Beispiel auch wenn wir die DGL in die Form $y' = y/x$ bringen und die Variablen separieren.

Eine Methode zum Finden des integrierenden Faktors lässt sich wie folgt ableiten. Die Forderung, dass die mit F multiplizierte DGL exakt ist impliziert

$$\frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ) \quad (6.26)$$

6.1. Differentialgleichungen erster Ordnung

oder nach Ausführen der Ableitungen

$$F_y P + F P_y = F_x Q + F Q_x \quad (6.27)$$

Eine allgemeine Lösung dieser Gleichung ist schwierig. Allerdings können wir versuchsweise annehmen, dass die Funktion F entweder nur von y oder nur von x abhängt. Es zeigt sich, dass diese Vereinfachung in vielen Fällen funktioniert.

Wir nehmen an, dass $F = F(x)$. Dann erhalten wir aus Gl. (6.27) die DGL

$$F P_y = F_x Q + F Q_x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (6.28)$$

Wenn die rechte Seite dieser DGL nur von x abhängt, also

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \stackrel{!}{=} R(x) \quad (6.29)$$

dann ergibt sich der integrierende Faktor als (die Integrationskonstante kann vernachlässigt werden)

$$F(x) = \exp \left[\int R(x) dx \right] \quad (6.30)$$

Auf ähnliche Weise können wir annehmen, dass $F = F(y)$. In diesem Fall erhalten wir

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dy} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \stackrel{!}{=} S(y) \quad (6.31)$$

mit der Lösung

$$F(y) = \exp \left[\int S(y) dy \right] \quad (6.32)$$

Beispiel

Im vorherigen Beispiel hatten wir $P = y$, $Q = -x$ und damit

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{1}{x} [1 - (-1)] = -\frac{2}{x},$$

also eine Funktion die nur von x abhängt. Aus Gl. (6.30) ergibt sich der integrierende Faktor

$$F(x) = \exp \left(\int R(x) dx \right) = \exp \left(-2 \int \frac{1}{x} dx \right) = \exp \ln \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

6.1.3 Lineare Differentialgleichungen

Wir nennen eine Differentialgleichung erster Ordnung linear wenn sie die Form

$$y' + p(x)y = r(x) \quad (6.33)$$

hat, oder in diese Form gebracht werden kann. Die Gleichung ist linear in der Funktion y und in deren Ableitung y' .

Beispiel

Die DGL

$$y + y' = \sin x$$

ist linear, im Unterschied zu

$$yy' = 0$$

Weiters nennen wir die DGL (6.33) homogen wenn $r(x) = 0$, und inhomogen wenn $r(x) \neq 0$. Eine homogene DGL hat also keine Terme die nicht von y oder y' abhängen.

Für lineare homogene DGL gilt das Superpositionsprinzip: sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen einer DGL, so ist die Linearkombination $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ ebenfalls eine Lösung:

$$(C_1y_1 + C_2y_2)' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1 \underbrace{[y_1' + p(x)y_1]}_0 + C_2 \underbrace{[y_2' + p(x)y_2]}_0 = 0.$$

Wenn wir annehmen, dass p und r stetige Funktionen sind, können wir eine allgemeine Lösung für Gl. (6.33) angeben. Die homogene Gleichung

$$y' + p(x)y = 0 \quad (6.34)$$

ist separierbar,

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad (6.35)$$

und liefert

$$y(x) = C \exp \left[- \int p(x)dx \right] \quad (6.36)$$

Die inhomogene DGL (6.33) lösen wir mit Hilfe eines integrierenden Faktors. Nach Umformen erhalten wir zunächst

$$(py - r)dx + dy = 0 \quad (6.37)$$

und somit $P = py - r$ und $Q = 1$ in der Notation von Gl. (6.25). Gleichung (6.30) hat dann die Form

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = p(x) \quad (6.38)$$

6.1. Differentialgleichungen erster Ordnung

mit der Lösung

$$F = \exp \left[\int p(x) dx \right] \quad (6.39)$$

Multiplikation der DGL (6.30) mit F ergibt

$$\exp \left[\int p(x) dx \right] [y' + p(x)y] = \exp \left[\int p(x) dx \right] r(x) \quad (6.40)$$

was sich auch als

$$\left\{ \exp \left[\int p(x) dx \right] y \right\}' = \exp \left[\int p(x) dx \right] r(x) \quad (6.41)$$

schreiben lässt. Integration auf beiden Seiten nach x ergibt

$$\exp \left[\int p(x) dx \right] y = \int dx \exp \left[\int p(x) dx \right] r(x) + C \quad (6.42)$$

Mit der Abkürzung $h = \int dx p(x)$ und nach Division durch e^h erhalten wir die allgemeine Lösung von Gl. (6.33):

$$y(x) = e^{-h} \left[\int dx e^h r + C \right] \quad (6.43)$$

Beispiel

Wir bestimmen die Lösung der DGL

$$y' - y = e^{2x}$$

Vergleich mit Gl. (6.33) ergibt

$$p(x) = -1, \quad r(x) = e^{2x}$$

und weiters

$$h = \int dx p(x) = - \int dx = -x$$

Als Lösung erhalten wir mit Hilfe von Gl. (6.43)

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x \left[\int dx e^{-x} e^{2x} + C \right] \\ &= e^x \int dx e^x + C e^x \\ &= e^{2x} + C e^x = e^x (e^x + C) \end{aligned}$$

6.1.4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Ein Anfangswertproblem der Form

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (6.44)$$

besitzt entweder keine Lösung, eine Lösung, oder viele (ev. unendlich viele) Lösungen.

Beispiel

Das Anfangswertproblem

$$|y'| + |y| = 0, \quad y(0) = 1$$

hat keine Lösung, da nur die Funktion $y = 0$ die DGL (aber nicht die Anfangsbedingung) erfüllt.

Dagegen hat das Anfangswertproblem

$$y' = x, \quad y(0) = 1$$

genau eine Lösung, und zwar $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Schließlich hat das Anfangswertproblem

$$xy' = y - 1, \quad y(0) = 1$$

unendlich viele Lösungen der Form $y = 1 + cx$, welche sie durch Separation in die Form $dy/(y - 1) = dx/x$ ergeben.

Bei einer gegebenen Problemstellung ist also die Frage, ob es Lösungen gibt und ob diese eindeutig sind. Weiters muss man sich bei der Beantwortung dieser Frage in der Regel auf ein endliches Intervall $a < x < b$ beschränken. In vielen Fällen ist eine DGL nicht analytisch lösbar, aber man möchte zumindest wissen ob und für welche Werte von x Lösungen existieren.

Hier seien zwei Theoreme ohne Beweis angeführt, die für Anfangswertprobleme in der Form von Gl. (6.44) gelten.

Existenz: Wenn $f(x, y)$ stetig und beschränkt in einem Gebiet der xy -Ebene ist welches den Punkt x_0 enthält, dann existiert für das Anfangswertproblem (6.44) zumindest eine Lösung in der Umgebung von (x_0, y_0) .

Eindeutigkeit: Wenn $\partial f / \partial y$ in diesem Gebiet existiert und stetig ist, dann hat Gl. (6.44) maximal eine Lösung. In Kombination mit dem Existenztheorem ist das Anfangswertproblem also in der Umgebung von (x_0, y_0) eindeutig lösbar.

6.2 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Viele in der Physik relevante Differentialgleichungen sind zweiter Ordnung. Hier beschränken wir uns auf lineare DGL, mit der Form

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (6.45)$$

bzw. im homogenen Fall,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (6.46)$$

Wir suchen Lösungen $y = h(x)$ auf einem Intervall I mit $a < x < b$. Wie für lineare und homogene DGL erster Ordnung gilt auch hier das Superpositionsprinzip. Wenn y_1 und y_2 Lösungen der DGL (6.46) sind, dann ist

$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (6.47)$$

ebenfalls eine Lösung.

Beispiel

Die DGL

$$y'' - y = 0$$

hat die Lösungen $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{-x}$. Entsprechend ist auch die Kombination

$$y_3 = 2e^x - e^{-x}$$

eine Lösung:

$$(2e^x - e^{-x})'' - (2e^x - e^{-x}) = (2e^x + e^{-x})' - (2e^x - e^{-x}) = (2e^x - e^{-x}) - (2e^x - e^{-x}) = 0$$

Der allgemeine Beweis ist einfach:

$$\begin{aligned} y_3'' + p y_3' + q y_3 &= (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) = 0 \end{aligned} \quad (6.48)$$

Beispiel

Das Superpositionsprinzip gilt nur für lineare und homogene DGL. Als Gegenbeispiel betrachten wir die nichtlineare DGL

$$y'' y - x y' = 0$$

mit den Lösungen $y_1 = x^2$ und $y_2 = 1$. Hier ist die Kombination $y_3 = x^2 + 1$ keine Lösung:

$$(x^2 + 1)''(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)' = (2x)'(x^2 + 1) - x(2x) = 2(x^2 + 1) - 2x^2 = 2$$

Für homogene DGL erster Ordnung hatten wir gesehen, dass die allgemeine Lösung noch eine freie Konstante C enthält, welche durch eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ festgelegt werden kann.

Die allgemeine Lösung einer homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Form

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (6.49)$$

wobei y_1 und y_2 selbst auch (spezielle) Lösungen der DGL sind (siehe unten). Ein Anfangswertproblem besteht im Falle einer DGL zweiter Ordnung aus der DGL und zwei Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (6.50)$$

Ein bekanntes Beispiel ist die Newtonsche Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$. Für eine eindeutige Lösung benötigen wir die Kenntnis des Ortes x und der Geschwindigkeit $\dot{x}$ zu einer Zeit t_0 .

Alternativ kann man auch ein sogenanntes Randwertproblem betrachten, bei dem der Wert von y an zwei verschiedenen Punkten festgelegt ist:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \quad (6.51)$$

Beispiel

Wir verwenden die Lösungen $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{-x}$ um das Anfangswertproblem

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2$$

mit dem Ansatz

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

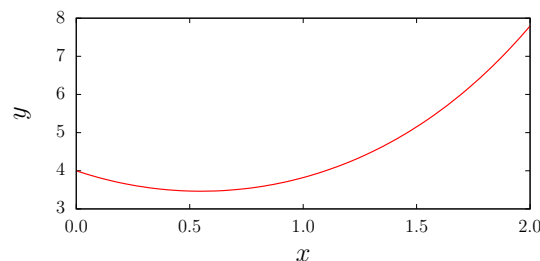
zu lösen. Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus

$$\begin{aligned} y(0) = C_1 + C_2 &\stackrel{!}{=} 4 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1 \\ y'(0) = C_1 - C_2 &\stackrel{!}{=} -2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 3 \end{aligned}$$

und somit haben wir die Lösung

$$y = e^x + 3e^{-x}$$

mit einem Minimum bei $x = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0.55$.



6.2. Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Eine wichtige Beobachtung ist, dass der Ansatz

$$y = C_1 e^x + C_2 \alpha e^x$$

keine Lösung des Anfangswertproblems erlaubt, weil e^x und αe^x nicht unabhängig sind.

Das Beispiel zeigt dass wir für die Lösungen y_1 und y_2 in Gl. (6.49) fordern müssen, dass die beiden Funktionen auf dem Intervall I unabhängig sind, und entsprechend eine Basis bilden in der allgemeine Lösungen der Form von Gl. (6.49) dargestellt werden können.

Genauso wie für Vektoren können wir die lineare Unabhängigkeit von zwei Funktionen durch die Bedingung

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad (6.52)$$

formulieren. Die Funktionen $y_1 = e^x$ und $y_2 = \alpha e^x$ aus dem obigen Beispiel erfüllen diese Beziehung offensichtlich nicht. Im Gegensatz dazu bilden die Funktionen e^x und e^{-x} eine Basis, und erlauben somit eine allgemeine Lösung der DGL $y'' - y = 0$.

Ein alternativer, nützlicher Test der linearen Unabhängigkeit zweier Funktionen ist die sogenannte Wronskideterminante:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \quad (6.53)$$

Wenn $W \neq 0$, dann sind y_1 und y_2 unabhängig.

Beispiel

Wir berechnen die Wronskideterminante für $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{-x}$,

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^{-x} e^x = -2$$

sowie für $y_1 = e^x$ und $y_2 = \alpha e^x$,

$$W(e^x, e^x) = \begin{vmatrix} e^x & \alpha e^x \\ e^x & \alpha e^x \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} e^x & e^x \\ e^x & e^x \end{vmatrix} = \alpha(e^x e^x - e^x e^x) = 0$$

6.2.1 Homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine wichtige Unterkategorie von DGL zweiter Ordnung im Hinblick auf Anwendungen und Lösbarkeit sind solche mit konstanten Koeffizienten:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (6.54)$$

Gleichung (6.54) verlangt, dass die Ableitungen y' und y'' proportional zur Funktion y sind. Eine Funktion die diese Bedingung erfüllt ist die Exponentialfunktion

$$y = e^{\lambda x} \quad (6.55)$$

Einsetzen dieses Ansatzes in Gl. (6.54) ergibt

$$(e^{\lambda x})'' + a(e^{\lambda x})' + be^{\lambda x} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0 \quad (6.56)$$

Daraus erhalten wir die quadratische (charakteristische) Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (6.57)$$

Die Nullstellen λ_1, λ_2 des charakteristischen Polynoms ergeben Lösungen

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \quad (6.58)$$

der DGL (6.54). Da

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}) \quad (6.59)$$

müssen wir für die Parameter in Gl. (6.54) die folgenden Fälle unterscheiden:

$$\begin{array}{ll} \text{Fall 1 :} & \text{zwei reelle Nullstellen} \quad a^2 - 4b > 0 \\ \text{Fall 2 :} & \text{doppelte reelle Nullstelle} \quad a^2 - 4b = 0 \\ \text{Fall 3 :} & \text{konjugiert komplexe Nullstellen} \quad a^2 - 4b < 0 \end{array} \quad (6.60)$$

Fall 1: $a^2 - 4b > 0$

Wir erhalten zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Die Lösungen

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \quad (6.61)$$

sind linear unabhängig und bilden eine Basis für die allgemeine Lösung:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (6.62)$$

Beispiel

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -5,$$

also $a = 1$ und $b = -2$. Einsetzen von $y = e^{\lambda x}$ liefert

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

mit den reellen Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{9}) = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{9}) = -2$$

6.2. Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung als

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

Die Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich aus den Anfangswerten:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} 4 \\ y'(0) &= C_1 - 2C_2 \stackrel{!}{=} -5 \end{aligned}$$

mit den Lösungen $C_2 = 3$ und $C_1 = 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y = e^x + 3e^{-2x}$$

Fall 2: $a^2 - 4b = 0$

Wenn das Argument der Wurzel in Gl. (6.59) verschwindet, haben wir eine doppelte Nullstelle

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}a \quad (6.63)$$

und deshalb zunächst nur eine Lösung

$$y_1 = e^{-ax/2} \quad (6.64)$$

Eine zweite, linear unabhängige Lösung erhalten wir aus dem Ansatz

$$y_2(x) = u(x)y_1(x) \quad (6.65)$$

Einsetzen in die DGL (6.54) liefert

$$\begin{aligned} (uy_1)'' + a(uy_1)' + b(uy_1) &= (u'y_1 + uy_1')' + a(u'y_1 + uy_1') + buy_1 \\ &= (u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + buy_1 \\ &= u \underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_0 + (u''y_1 + 2u'y_1' + au'y_1) \end{aligned} \quad (6.66)$$

Das lässt sich durch Einsetzen von $y_1' = -ay_1/2$ weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} (u''y_1 + 2u'y_1' + au'y_1) &= u''y_1 - u'y_1a + au'y_1 \\ &= u''y_1 = 0 \end{aligned} \quad (6.67)$$

Nachdem $y_1 \neq 0$ gilt, haben wir die DGL für u

$$u'' = 0 \quad (6.68)$$

mit der allgemeinen Lösung $u = Cx + D$. Um eine allgemeine Lösung von Gl. (6.54) zu erhalten, ist es ausreichend $C = 1$ und $D = 0$ zu nehmen. Das ergibt

$$y(x) = C_1 e^{-ax/2} + C_2 x e^{-ax/2} \quad (6.69)$$

Die Funktionen $e^{\lambda x}$ und $xe^{\lambda x}$ sind unabhängig:

$$W(e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{\lambda x}(e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x}) - xe^{\lambda x}\lambda e^{\lambda x} = e^{2\lambda x} \quad (6.70)$$

Beispiel

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

und der doppelten Nullstelle

$$\lambda = 2$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Die Konstanten können wieder durch die Anfangswerte festgelegt werden:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 && \stackrel{!}{=} 3 \\ y'(0) &= 2C_1 + C_2 && \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Wir finden $C_1 = 3$ und $C_2 = -5$.

Man beachte dass Gl. (6.69) nur dann eine Lösung darstellt wenn eine doppelte Nullstelle vorliegt, also $a^2 - 4b = 0$.

Fall 3: $a^2 - 4b < 0$

In diesem Fall erhalten wir aus der charakteristischen Gleichung ein Paar von komplex konjugierten Nullstellen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = -\frac{1}{2}a + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{4b - a^2}} = -\frac{1}{2}a + i\omega \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = -\frac{1}{2}a - \sqrt{-1}\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{4b - a^2}} = -\frac{1}{2}a - i\omega \end{aligned} \quad (6.71)$$

mit $\omega = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$, und die Lösungen

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= e^{\lambda_1 x} = e^{-ax/2 + i\omega x} = e^{-ax/2}(\cos \omega x + i \sin \omega x) \\ \tilde{y}_2 &= e^{\lambda_2 x} = e^{-ax/2 - i\omega x} = e^{-ax/2}(\cos \omega x - i \sin \omega x) \end{aligned} \quad (6.72)$$

Aufgrund des Superpositionsprinzips sind auch die reellen Linearkombinationen

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = e^{-ax/2} \cos \omega x \\ y_2 &= \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = e^{-ax/2} \sin \omega x \end{aligned} \quad (6.73)$$

6.2. Differentialgleichungen zweiter Ordnung

linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (y_1 und y_2 sind offensichtlich nicht proportional). Die allgemeine Lösung im Falle von zwei komplexen Nullstellen hat also die Gestalt

$$y(x) = e^{-ax/2} (A \cos \omega x + B \sin \omega x) \quad (6.74)$$

Beispiel

Das Anfangswertproblem

$$y'' + 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

hat das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

mit den Nullstellen

$$\lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$$

Die allgemeine Lösung ist demnach [$a/2 = 1$, $\omega = \sqrt{2}$]

$$y = e^{-x} (A \cos \sqrt{2}x + B \sin \sqrt{2}x)$$

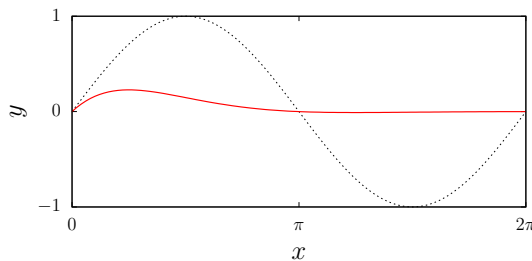
Die Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir aus

$$y(0) = e^{-0} (A \cdot 1 + B \cdot 0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$y'(0) = [e^{-x} B \sin \sqrt{2}x]' \Big|_0 = B e^{-x} (-\sin \sqrt{2}x + \sqrt{2} \cos \sqrt{2}x) \Big|_0 = \sqrt{2} B \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

als

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x} \sin \sqrt{2}x$$



Im Unterschied zu den Fällen 1 und 2, in denen wir jeweils eine Überlagerung von Exponentialfunktionen hatten, liefert der Fall 3 die Möglichkeit von periodischen Lösungen. Differentialgleichungen der Form (6.54) treten insbesondere bei der Beschreibung von Schwingungen in mechanischen Systemen oder in elektrischen Schaltkreisen auf. Betrachten wir etwa eine Masse an einer Feder, erhalten wir aus dem Hookschen Gesetz $F = my'' = -ky$ die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \quad (6.75)$$

welche ungedämpfte Schwingungen beschreibt:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.76)$$

6.2.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wir betrachten die lineare, homogene DGL zweiter Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (6.77)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (6.78)$$

- Sind p und q konstant, dann haben wir bereits gezeigt dass eine allgemeine Lösung existiert.
- Wenn p und q Funktionen von x sind, gilt: sind $p(x)$ und $q(x)$ auf einem Intervall I stetig, dann haben sowohl die DGL als auch das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf I . Die allgemeine Lösung kann in der Form

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

geschrieben werden, mit auf I linear unabhängigen Funktionen y_1, y_2 . Jede spezielle Lösung hat ebenfalls diese Form. (Es gibt also keine weiteren, singulären Lösungen die sich nicht aus der allgemeinen Lösung ableiten lassen.)

6.2.3 Inhomogene Differentialgleichungen

Wir wissen nun, dass die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (6.79)$$

die Form

$$y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (6.80)$$

hat. Für inhomogene DGL der Form

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (6.81)$$

kann man zeigen, dass die allgemeine Lösung durch die Summe von y_h , also der allgemeinen Lösung im Fall $r(x) = 0$, und einer beliebigen Lösung y_p von Gl. (6.81) gegeben ist:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (6.82)$$

6.2. Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Das $y(x)$ eine Lösung von Gl. (6.81) ist, folgt aus

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (y_h + y_p)'' + p(x)(y_h + y_p)' + q(x)(y_h + y_p) \\ &= y_h'' + y_p'' + p(x)(y_h' + y_p') + q(x)(y_h + y_p) \\ &= \underbrace{y_h'' + p(x)y_h' + q(x)y_h}_0 + \underbrace{y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p}_{r(x)} \\ &= r(x) \end{aligned} \tag{6.83}$$

Beispiel

Wir betrachten die DGL

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$$

Für die homogene Gleichung finden wir das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

und die allgemeine Lösung

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

Da $r(x)$ eine Exponentialfunktion ist, versuchen wir folgenden Ansatz für y_p :

$$y_p(x) = A e^{2x} \sim r(x)$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$(4A - 6A - 4A)e^{2x} = 3e^{2x}$$

mit der Lösung $A = -1/2$. Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

Wir lernen im Folgenden zwei Verfahren kennen, um eine Lösung y_p einer inhomogenen Differentialgleichung zu finden.

Methode der unbestimmten Koeffizienten

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten ist einfach, funktioniert aber nicht für beliebige Funktionen $r(x)$. Wir haben sie im Prinzip schon im letzten Beispiel kennengelernt. Je nach Form der Funktion $r(x)$ wählt man einen Ansatz für y_p der noch unbestimmte Koeffizienten beinhaltet. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL werden die Koeffizienten festgelegt, und man erhält eine partikuläre Lösung.

Im vorherigen Beispiel war $r(x) = 3e^{2x}$. Da sich die Exponentialfunktion durch Differenzieren nicht verändert, hatten wir $y_p = A e^{2x}$ versucht. Die möglichen Formen von $r(x)$,

bei denen die Methode der unbestimmten Koeffizienten funktioniert, sind

$$\begin{aligned}
 r(x) = Ke^{\gamma x} &\Rightarrow y_p = Ae^{\gamma x} \\
 r(x) = Kx^n &\Rightarrow y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 \\
 r(x) = K \sin \omega x &\Rightarrow y_p = A \sin \omega x + B \cos \omega x \\
 r(x) = K \cos \omega x &\Rightarrow y_p = A \sin \omega x + B \cos \omega x \\
 r(x) = Ke^{\gamma x} \sin \omega x &\Rightarrow y_p = e^{\gamma x} (A \sin \omega x + B \cos \omega x) \\
 r(x) = Ke^{\gamma x} \cos \omega x &\Rightarrow y_p = e^{\gamma x} (A \sin \omega x + B \cos \omega x)
 \end{aligned} \tag{6.84}$$

In allen Fällen basiert der Ansatz darauf, dass die entsprechende Funktion durch Ableiten die Form der Funktion $r(x)$ annimmt.

Beispiel

Für die DGL

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x$$

ergibt der Ansatz

$$y_p(x) = A \sin x + B \cos x$$

die Gleichung

$$-A \sin x - B \cos x - 3(A \cos x - B \sin x) - 4(A \sin x + B \cos x) = 2 \sin x$$

bzw.

$$(-5A + 3B) \sin x + (-5B - 3A) \cos x = 2 \sin x$$

mit den Lösungen $A = -5/17$ und $B = 3/17$. Die partikuläre Lösung lautet also

$$y_p(x) = -\frac{5}{17} \sin x + \frac{3}{17} \cos x$$

Komplikationen treten auf, wenn der Ansatz eine Funktion enthält die auch eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist. In dem Fall muss man den Ansatz mit x (homogene DGL hat einfache Nullstellen) bzw. x^2 (homogene DGL hat eine doppelte Nullstelle) multiplizieren. [Wenn y_p auch Lösung der homogenen Gleichung ist, ergibt Einsetzen in die linke Seite Null statt $r(x)$.]

Beispiel

Wir betrachten die DGL

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$$

Für die homogene DGL hatten wir bereits

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

gefunden. Der Ansatz

$$y_p(x) = Ae^{-x}$$

ist daher nicht richtig. Stattdessen liefert

$$y_p(x) = Axe^{-x}$$

6.2. Differentialgleichungen zweiter Ordnung

eine partikuläre Lösung:

$$y_p = -\frac{1}{5}xe^{-x}$$

Methode der Variation der Parameter

Ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung einer partikulären Lösung beruht auf der Idee, die Konstanten C_1 und C_2 in der Lösung y_h durch Funktionen bzw. Parameter zu ersetzen:

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \quad (6.85)$$

Die Funktionen u, v werden dann so bestimmt, dass y_p die inhomogene Differentialgleichung erfüllt. Ohne Beweis sei hier das Resultat angeführt:

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx \quad (6.86)$$

mit der Wronskideterminante $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Obwohl diese Methode allgemein anwendbar ist [sofern die DGL zuvor in die Form von Gl. (6.81) gebracht wird], kann die Berechnung der Integrale in Gl. (6.86) schwierig sein. Wenn die Funktion $r(x)$ das zulässt, ist also die Methode der unbestimmten Konstanten vorzuziehen.

Beispiel

Die DGL

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

hat im homogenen Fall die Lösung

$$y_h(x) = A \underbrace{\cos x}_{y_1} + B \underbrace{\sin x}_{y_2}$$

Mit

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \cos x \cos x - \sin x (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

erhalten wir aus Gl. (6.86)

$$\begin{aligned} y_p &= -\cos x \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \sin x \int \frac{\cos x}{\cos x} dx \\ &= \cos x \ln |\cos x| + x \sin x \end{aligned}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y = y_h + y_p = A \cos x + B \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$$

6.3 Differentialgleichungssysteme

Analog zu Gleichungssystemen, welche gekoppelte Gleichungen für mehrere unbekannte Variable darstellen, kann man auch Systeme von Differentialgleichungen betrachten. Die allgemeine Form eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung lautet (wir verwenden in diesem Abschnitt den Buchstaben t für die unabhängige Variable)

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (6.87)$$

Das sind n DGL für n unbekannte Funktionen y_i , wobei die rechte Seite jeder Gleichung im Allgemeinen von allen Funktionen $y_1, \dots, y_n$ abhängt. Die einzelnen Zeilen bzw. DGL sind also gekoppelt. Das System können wir auch als Vektorgleichung schreiben,

$$\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y}) \quad (6.88)$$

Man beachte, dass es nur eine einzige Variable t gibt, da wir es weiterhin mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zu tun haben. Eine Lösung des Systems hat die Form eines Vektors aus n Funktionen,

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix} \quad (6.89)$$

Ein Anfangswertproblem für ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung benötigt zusätzlich noch die Anfangsbedingung

$$\vec{y}(t_0) = \vec{K} \quad (6.90)$$

Besonders einfach sind wiederum lineare Differentialgleichungssysteme,

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ y_2' &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{aligned} \quad (6.91)$$

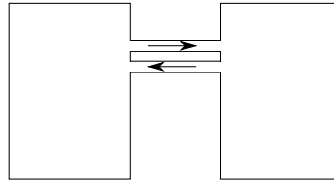
welche sich auch in der Form

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{g} \quad (6.92)$$

schreiben lassen. Die $n \times n$ Matrix A hat die Elemente a_{ij} , und der Vektor g stellt die Inhomogenität des Differentialgleichungssystems dar.

Beispiel

Als physikalisches Beispiel für ein Differentialgleichungssystem betrachten wir Wasser in zwei Tanks mit jeweils 100 Liter Inhalt, welche durch ein Rohrsystem verbunden sind das einen zeitlich konstanten Austausch ermöglicht. Zum Beispiel kann man sich fragen, wie sich die Konzentration y an Chlor mit der Zeit verändert, wenn man zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bestimmte Menge in einen der beiden Tanks gibt.



Pro Zeiteinheit soll 1 Liter von Tank 1 in Tank 2 fließen, und gleichzeitig 1 Liter von Tank 2 in Tank 1. Die Chlorkonzentration in den beiden Tanks wird also durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{100}y_2 - \frac{1}{100}y_1 \\ y_2' &= \frac{1}{100}y_1 - \frac{1}{100}y_2 \end{aligned}$$

Positive Terme entsprechen einem Zufluss, negative Terme einem Abfluss. Die Änderung der Konzentration ergibt sich als die geflossene Menge mal deren Chlorkonzentration. Dieses Problem lässt sich in Matrixform wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Differentialgleichungssysteme sind auch deshalb wichtig, weil man Differentialgleichungen höherer Ordnung in Differentialgleichungssysteme erster Ordnung umschreiben kann. Ausgehend von der DGL n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (6.93)$$

erhalten wir durch die Einführung von neuen Variablen

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)} \quad (6.94)$$

das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (6.95)$$

Die ersten $n-1$ Gleichungen entstehen durch die Definition von y_i in Gl. (6.94). Die letzte Gleichung ist die ursprüngliche Differentialgleichung, in der wir y und seine Ableitungen durch die entsprechenden y_i ersetzt haben.

Beispiel

Die Bewegung einer Masse an einer Feder wird beschrieben durch die DGL zweiter Ordnung

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0$$

Mit $y = y_1$ und $y' = y_2$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m}y_1 \end{aligned}$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Ohne Beweis sei angeführt, dass wenn die Funktionen $f_1, \dots, f_n$ stetige Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen $\partial f_1/\partial y_1, \dots, \partial f_1/\partial y_n, \dots, \partial f_n/\partial y_n$ sind, es in der Umgebung des Anfangspunktes $(t_0, K_1, \dots, K_n)$ eine eindeutige Lösung von Gl. (6.87) gibt.

Für lineare Systeme der Form (6.91) gilt weiter: sind die Funktionen $a_{ij}(t)$ und $g_i(t)$ stetig auf einem Intervall $\alpha < t < \beta$ das den Punkt t_0 enthält, dann gibt es auf diesem Intervall eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. Für das homogene Problem $[g_i(t) = 0, i = 1, \dots, n]$ gilt wieder das Superpositionsprinzip: sind $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}$ Lösungen, dann ist

$$\vec{y} = C_1 \vec{y}^{(1)} + C_2 \vec{y}^{(2)} \quad (6.96)$$

ebenfalls eine Lösung.

Die allgemeine Lösung eines homogenen, linearen Systems der Form

$$\vec{y}' = A\vec{y} \quad (6.97)$$

mit der Dimension n hat die Form

$$\vec{y} = C_1 \vec{y}^{(1)} + C_2 \vec{y}^{(2)} + \dots + C_n \vec{y}^{(n)} \quad (6.98)$$

Hier bilden $\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(n)}$ eine Basis oder ein sogenanntes Fundamentalsystem. Die Unabhängigkeit der Funktionen $\vec{y}^{(i)}$ ist gleichbedeutend mit einer von Null verschiedenen

Wronskideterminante

$$W(\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(n)}) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \dots & y_1^{(n)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \dots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \quad (6.99)$$

Wenn das Differentialgleichungssystem aus einer DGL höherer Ordnung entstanden ist, entspricht diese Determinante der Wronskideterminante in Gl. (6.53).

6.3.1 Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Im Folgenden beschränken wir uns auf Differentialgleichungssysteme der Form

$$\vec{y}' = A\vec{y} \quad (6.100)$$

wobei die Matrixelemente a_{ij} keine Funktionen sondern Konstanten sind. Wir wissen, dass die Lösung einer einzelnen DGL $y' = ky$ die Form $y = Ce^{kx}$ hat. Entsprechend versuchen wir das System (6.100) durch den Ansatz

$$\vec{y} = \vec{v}e^{\lambda t} \quad (6.101)$$

zu lösen. Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned} (\vec{v}e^{\lambda t})' &= A(\vec{v}e^{\lambda t}) \\ \lambda \vec{v}e^{\lambda t} &= A\vec{v}e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (6.102)$$

Das entspricht dem Eigenwertproblem

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (6.103)$$

Lösungen von Gl. (6.100) haben also die Form von Gl. (6.101), wobei λ ein Eigenwert der Matrix A ist, und $\vec{v}$ der dazugehörige Eigenvektor.

Wenn die Matrix n linear unabhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat, dann bilden die daraus folgenden Lösungen $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ eine Basis:

$$W = \begin{vmatrix} v_1^{(1)}e^{\lambda_1 t} & v_1^{(2)}e^{\lambda_2 t} & \dots & v_1^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ v_2^{(1)}e^{\lambda_1 t} & v_2^{(2)}e^{\lambda_2 t} & \dots & v_2^{(n)}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^{(1)}e^{\lambda_1 t} & v_n^{(2)}e^{\lambda_2 t} & \dots & v_n^{(n)}e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t} \dots e^{\lambda_n t} \begin{vmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & \dots & v_1^{(n)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & \dots & v_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^{(1)} & v_n^{(2)} & \dots & v_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6.104)$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Lösung von Gl. (6.100) als

$$\vec{y} = C_1 \vec{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \vec{v}^{(n)} e^{\lambda_n t} \quad (6.105)$$

Beispiel

Wir kehren zurück zum Beispiel der zwei Wassertanks, beschrieben durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Matrix ergeben sich aus

$$\begin{vmatrix} -0.01 - \lambda & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 - \lambda \end{vmatrix} = (0.01 + \lambda)^2 - 0.01^2 = \lambda(\lambda + 0.02)$$

als $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -0.02$. Die dazugehörigen Eigenvektoren finden wir aus den Gleichungen

$$(A - \lambda_1 E)\vec{v}^{(1)} = 0 : \quad \begin{pmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1^{(1)} = v_2^{(1)}$$

$$(A - \lambda_2 E)\vec{v}^{(2)} = 0 : \quad \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1^{(2)} = -v_2^{(2)}$$

mit der möglichen Wahl der Eigenvektoren

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit haben wir die allgemeine Lösung

$$\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0.02t}$$

Wenn wir die Anfangsbedingung $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0.1$ vorgeben, bestimmen sich die Konstanten C_1 und C_2 anhand von

$$\vec{y}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

zu $C_1 = 0.0$, $C_2 = -0.05$. Damit wird die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y} = 0.05 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0.05 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0.02t}$$

bzw. in Komponenten

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.05 - 0.05e^{-0.02t} \\ y_2 &= 0.05 + 0.05e^{-0.02t} \end{aligned}$$

y_1 nimmt also von $t = 0$ weg zu, während y_2 abfällt. Im Limes $t \rightarrow \infty$ haben beide Tanks eine Konzentration von 0.05.

Die bisherige Diskussion beruhte auf der Annahme, dass die $n \times n$ Matrix A n unabhängige Eigenvektoren besitzt. Wenn ein oder mehrere Eigenwerte entartet sind, ist das nicht

notwendigerweise der Fall, und es sind weitere Schritte notwendig um eine allgemeine Lösung zu erhalten. Z. B. im Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$ kann man neben der Lösung $y^{(1)} = \vec{v}e^{\mu t}$ eine zweite Lösung durch den Ansatz

$$\vec{y}^{(2)} = \vec{v}te^{\mu t} + \vec{w}e^{\mu t} \quad (6.106)$$

gewinnen. Der Vektor $\vec{w}$ muss durch Einsetzen in das Gleichungssystem bestimmt werden.

6.3.2 Inhomogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{g} \quad (6.107)$$

hat eine allgemeine Lösung die die Summe der allgemeinen Lösung des homogenen Systems und einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems ist:

$$\vec{y} = \vec{y}^{(h)} + \vec{y}^{(p)} \quad (6.108)$$

Zur Bestimmung einer Lösung $\vec{y}^{(p)}$ stehen verschiedene Methoden zur Verfügung. Hier zeigen wir anhand eines Beispiels die Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Zwei weitere Verfahren beruhen auf der Variation der Parameter bzw. auf der Diagonalisierung der Matrix A .

Beispiel

Wir suchen eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 2t^2 + 10t \\ t^2 + 9t + 3 \end{pmatrix}$$

Wie im Falle von einzelnen Differentialgleichungen machen wir einen Ansatz der die Form der Inhomogenität widerspiegelt:

$$\vec{y}^{(p)} = \vec{u} + \vec{v}t + \vec{w}t^2$$

Einsetzen in das DGL-System liefert:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\vec{y}'} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2w_1 \\ 2w_2 \end{pmatrix} t}_{A\vec{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2u_1 - 4u_2 \\ u_1 - 3u_2 \end{pmatrix}}_{A\vec{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2v_1 - 4v_2 \\ v_1 - 3v_2 \end{pmatrix} t}_{A\vec{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2w_1 - 4w_2 \\ w_1 - 3w_2 \end{pmatrix} t^2}_{A\vec{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2t^2 + 10t \\ t^2 + 9t + 3 \end{pmatrix}}_{\vec{g}}$$

Durch Vergleich der beiden Seiten der Gleichung folgt

$$\begin{array}{llll} v_1 & = & 2u_1 - 4u_2 & \quad 2w_1 & = & 2v_1 - 4v_2 + 10 & \quad 0 & = & 2w_1 - 4w_2 + 2 \\ v_2 & = & u_1 - 3u_2 + 3 & \quad 2w_2 & = & v_1 - 3v_2 + 9 & \quad 0 & = & w_1 - 3w_2 + 1 \end{array}$$

mit den Lösungen

$$w_1 = -1, w_2 = 0, \quad v_1 = 0, v_2 = 3, \quad u_1 = u_2 = 0$$

und somit

$$\vec{y}^{(p)} = \begin{pmatrix} -t^2 \\ 3t \end{pmatrix}$$

6.4 Ausblick

Wichtige Aspekte die hier nicht besprochen wurden sind z. B.:

- Die Laplacetransformation, eine Integraltransformation.
- Der Reihenansatz für DGL zweiter Ordnung, bei dem man am Punkt x_0 den Ansatz $y = \sum_n a_n(x - x_0)^n$ macht, und die Koeffizienten aus der DGL bestimmt.
- DGL höherer Ordnung, welche sich ebenso wie DGL zweiter Ordnung auf Systeme erster Ordnung zurückführen lassen.
- Nichtlineare Differentialgleichungen, für die es praktisch keine allgemeinen Methoden gibt, und für die z. B. das Superpositionsprinzip nicht gilt.