

UNIVERSITÄT WÜRZBURG
FAKULTÄT FÜR PHYSIK UND ASTRONOMIE

MANUSKRIFT ZUR VORLESUNG
(MATHEMATIK FÜR PHYSIKER UND INGENIEURE III)

Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

Autoren:
D. BRANDT
T. UMLAUF

Dozenten:
Prof. Dr. B. TRAUZETTEL
Prof. Dr. W. POROD

19. September 2018



UNIVERSITÄT WÜRZBURG
FAKULTÄT FÜR PHYSIK UND ASTRONOMIE

MANUSKRIFT ZUR VORLESUNG
(MATHEMATIK FÜR PHYSIKER UND INGENIEURE III)

Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

Autoren:
D. BRANDT
T. UMLAUF

Dozenten:
Prof. Dr. B. TRAUZETTEL
Prof. Dr. W. POROD

19. September 2018



Inhaltsverzeichnis

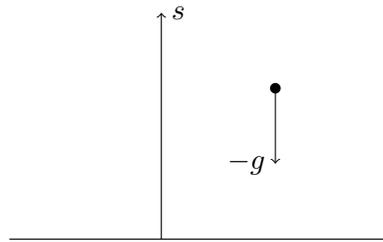
1	Differentialgleichungen	1
1.1	Grundbegriffe	1
1.2	Lösungsmethoden für DGL 1. Ordnung	4
1.2.1	DGL mit getrennten Variablen	4
1.2.2	Homogene DGL	6
1.2.3	Lineare DGL 1. Ordnung	7
1.2.4	Exakte DGL	8
1.2.5	Implizite DGL	11
1.2.6	Potenzreihenansatz	12
1.3	Existenz- und Eindeutigkeitssatz	14
1.3.1	Picardsche Integralgleichung	14
1.3.2	Lipschitzbedingung	14
1.3.3	Banachscher Fixpunktsatz	15
1.3.4	Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard/Lindelöf	17
1.3.5	Bemerkungen und Ergänzungen	18
1.4	Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung	21
1.4.1	Zusammenhang zwischen einem System von n DGL 1. Ordnung und einer DGL n -ter Ordnung	21
1.4.2	Existenz- und Eindeutigkeitssatz	22
1.4.3	Direkt integrierbare DGL n -ter Ordnung	23
1.4.4	Lineare DGL n -ter Ordnung	24
1.4.5	Lineare DGL mit konst. Koeffizienten	29
1.4.6	Lineare Systeme	32
1.4.7	Lineare Systeme mit konst. Koeffizienten	36
1.4.8	Autonome Systeme, Klassifikation singulärer Punkte, Stabilität	39
1.5	Kurze Anmerkung zu Randbedingungen	45
1.6	Zusammenfassung	46
2	Partielle Differentialgleichungen	47
2.1	Definitionen und Beispiele	47
2.2	Die lineare partielle DGL 1. Ordnung	48
2.2.1	Lösung der linearen partiellen DGL 1. Ordnung	48
2.2.2	Existenzsatz, Randbedingungen	51
2.3	Das vollständige, allgemeine, singuläre Integral	55
2.3.1	Konstruktion von Lösungen durch Einhüllende	55
2.3.2	Anwendung auf Hamilton-Jacobi-Theorie	56

2.4	Lineare partielle DGL 2. Ordnung	58
2.4.1	Klassifikation einer linearen partiellen DGL 2. Ordnung	59
2.4.2	Beispiele aus der Physik	61
2.5	Die eindimensionale Wellengleichung	62
2.5.1	Klassifikation der Anfangs- und Randbedingungen	62
2.5.2	Reduktion allgemeiner Randwertaufgaben	63
2.5.3	Eindeutigkeitssatz	63
2.5.4	Die Methode von D'Alembert	64
2.5.5	Die Methode von Fourier (Separation)	69
2.6	Wärmeleitung im Draht	74
2.6.1	Produktlösungen und Superpositionsansatz	75
2.6.2	Existenz einer Lösung	75
2.6.3	Maximumsprinzip und Eindeutigkeitssatz	77
2.7	3D Wellengleichung	78
2.7.1	Die Poisson-Formel und das Huygenssche Prinzip	78
2.8	Helmholtz-Gleichung und Potentialtheorie	82
2.8.1	Radialsymmetrische Lösungen	83
2.8.2	Potenzreihenansatz und spezielle Funktionen	84
2.8.3	Green Funktion der Helmholtz-Gleichung	95
2.8.4	Die erste Greensche Formel	98
2.8.5	Die zweite Greensche Formel	100
2.8.6	Ganzraumprobleme der inhomogenen Helmholtz-Gleichung	101
2.8.7	Randwertprobleme im \mathbb{R}^3	102
2.8.8	Separationslösungen der Helmholtzgleichung	105
2.9	Parabolische Differentialgleichungen	113
2.9.1	Die Wärmeleitungsgleichung	113
2.9.2	Lösung der Wärmeleitungsgleichung	115
3	Mathematischer Anhang	123
3.1	Partielles Differenzieren und das totale Differenzial	123
3.2	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	124
3.3	Normaxiome	124
3.4	Lineare Algebra	124
3.5	Vektoranalysis	133
3.6	Distributionen und Greensche Funktionen	134
3.6.1	Distributionen	135
3.6.2	Green Funktion	139
3.7	Satz von Gauß	140
3.8	Numerische Verfahren	140
	Stichwortverzeichnis	147
	Literatur	151

1 Differentialgleichungen

1.1 Grundbegriffe

Beispiel: Freier Fall im luftleeren Raum



Der Körper unterliegt allein der Schwerkraft und erfährt die konstante Erdbeschleunigung $a = -g$. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen der Weg-Zeit-Funktion $s(t)$, der Geschwindigkeit $v(t)$ und der Beschleunigung $a(t)$:

$$\begin{aligned}v(t) &= \dot{s}(t) \equiv \frac{ds}{dt}, \\ \frac{d^2s}{dt^2} &= \ddot{s}(t), \\ a(t) &= \dot{v}(t) \equiv \ddot{s}(t).\end{aligned}$$

Für den freien Fall gilt:

$$\ddot{s}(t) = -g \tag{1.1}$$

Diese Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung. Ihre Lösung ist eine Funktion, die Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$ der Fallbewegung.

Lösung durch 2-malige Integration:

$$\begin{aligned}v(t) &= \int a(t)dt = -gt + C_1 \\ s(t) &= \int v(t)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2\end{aligned}$$

1 Differentialgleichungen

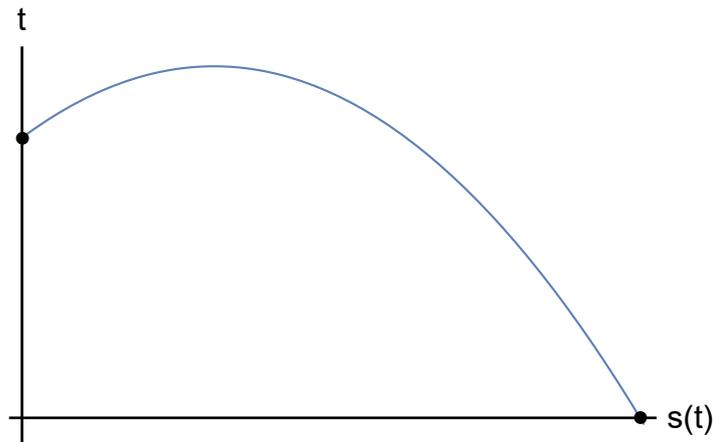
Diese Gleichungen beschreiben Lösungsscharen.¹

C_1 und C_2 nennt man Integrationskonstanten bzw. PARAMETER. Diese Parameter haben eine physikalische Bedeutung:

$$\left. \begin{array}{l} s(0) = C_2 : \text{Anfangsposition} \\ v(0) = C_1 : \text{Anfangsgeschwindigkeit} \end{array} \right\} \text{für } t=0$$

Die Anfangswerte $s(0) \equiv s_0$ und $v(0) \equiv v_0$ bestimmen EINDEUTIG die spezielle Lösung der DGL:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$



Definition: Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannteten Funktion $y = y(x)$ bis zur n -ten Ordnung auftreten, heißt GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNG n -TER ORDNUNG.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{mit } x \in I \subset \mathbb{R}$$

(z.B. Gleichung (1.1))

¹Genauer:

$$\begin{aligned} a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -g &\Rightarrow \int_{t_0}^t \dot{v}(t) dt = \int_{t_0}^t -g dt \Leftrightarrow \int_{t_0}^t \frac{dv(t)}{dt} dt = \\ \int_{t_0}^t -g dt \Leftrightarrow \int_{v_0(t_0)}^{v(t)} dv(t) = \int_{t_0}^t -g dt & \\ \Leftrightarrow v(t) - v_0(t_0) = -g(t - t_0) \Leftrightarrow v(t) = -gt + \underbrace{gt_0 + v_0(t_0)}_{=C_1} & \end{aligned}$$

$$\text{analog für } v(t) = \dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = v(t) \Rightarrow s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

Definition: Eine Gleichung zwischen einer unbekanntem reellen Funktion $y = y(x_1, \dots, x_r)$, mehrerer reeller Variablen $x_i \in I_i \subset \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) und ihren partiellen Ableitungen

$$F \left(x_i, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \right) = 0 \quad \text{mit } i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, r\}$$

heißt PARTIELLE DGL n -TER ORDNUNG.

Beispiel: Die Wellengleichung für $\Phi(x, t)$ (in einer Raumdimension und einer Zeitdimension)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

ist eine partielle DGL 2. Ordnung.

Definition: Mehrere Gleichungen für mehrere reelle Funktionen $y_k(x_1, \dots, x_r)$ (mit $k = 1, 2, \dots, p$), mehrerer reeller Variablen $x_i \in I_i \subset \mathbb{R}$ (mit $i = 1, 2, \dots, r$) und ihrer partiellen Ableitungen

$$F_l \left(x_i, \frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^n y_k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \right) = 0$$

mit $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, r\}$, $l = 1, 2, \dots, q$ bilden ein SYSTEM PARTIELLER DGL. Die Reduzierung auf eine Variable x_{i_0} führt entsprechend zu einem System gewöhnlicher DGL.²

Beispiel: Die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

bilden zusammen ein System von 3 gewöhnlichen DGL 2. Ordnung.

Beispiel: Die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

bilden zusammen ein System von acht partiellen DGL 1. Ordnung für 6 unbekannte Funktionen $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{B}(\vec{x}, t)$.

²Im Folgenden wird die Abkürzung der DGL für Einzahl und Mehrzahl verwendet.

1 Differentialgleichungen

Definition: Eine Funktion $y(x)$ heißt eine LÖSUNG DER DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt.

Die ALLGEMEINE LÖSUNG einer DGL n -ter Ordnung enthält noch n voneinander unabhängige Parameter.

Eine SPEZIELLE oder PARTIKULÄRE LÖSUNG erhält man aus der allgemeinen, indem man den n Parametern feste Werte zuweist. Dies geschieht mithilfe von ANFANGS-BEDINGUNGEN oder RANDBEDINGUNGEN.

1.2 Lösungsmethoden für DGL 1. Ordnung

Sei eine DGL 1. Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gegeben. Das Ziel ist, die Lösung $y(x)$ zu bestimmen.

Abhängig von der Gestalt von $f(x, y)$ gibt es verschiedene Lösungsmethoden.

1.2.1 DGL mit getrennten Variablen

Seien nun $f(x)$ und $g(y)$ auf ihren zugeordneten Intervallen $I_x, I_y \subset \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g(y) \neq 0 \quad \forall y \in I_y$.

Ist nun die DGL vom Typ

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

oder auch

$$g(y)y' = f(x), \tag{1.2}$$

dann ist das Anfangswertproblem (AWP) mit gegebenen Anfangswerten $x_0 \in I_x$ und $y_0 \in I_y$ in hinreichend kleiner Umgebung von x_0 eindeutig lösbar.

Eine DGL dieser Form kann mit folgendem Prinzip gelöst werden:

1. Trennung der beiden Variablen
2. Integration auf beiden Seiten der Gleichung
3. Auflösen der resultierenden impliziten³ Gleichung vom Typ $G(y) = F(x) + C$ nach y

Expliziter:

Eine DGL der Form (1.2)

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

ist äquivalent zu

$$g(y)y' = f(x).$$

³Definition implizit / explizit siehe Seite 9

1.2 Lösungsmethoden für DGL 1. Ordnung

Sei $G(y)$ die Stammfunktion zu $g(y)$, somit gilt

$$\frac{d}{dy}G(y) = g(y) \quad \text{mit } y = y(x).$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dx}G(y) = \frac{\partial G(y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dG(y)}{dy} \cdot y' = g(y)y' \stackrel{(1.2)}{=} f(x) = \frac{d}{dx}F(x),$$

also

$$\frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dx}F(x). \quad (1.3)$$

Es folgt durch Integration auf beiden Seiten über x :

$$G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0) \quad \text{mit } y_0 = y(x_0)$$

und somit

$$G(y) = F(x) - F(x_0) + G(y_0).$$

Unter Verwendung der zu G inversen Funktion G^{-1} (unter der Annahme derer Existenz) ergibt sich

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)).$$

mit $y = y(x)$ und speziell $y_0 = y(x_0)$. $y(x)$ ist demnach eine eindeutige Lösung zur DGL (1.2).

Beispiel: Es sei die DGL

$$y' = \frac{-x(y^2 - 1)}{y(x^2 - 1)}$$

gegeben.

$$\begin{aligned} &\stackrel{1.}{\implies} \frac{y}{y^2 - 1} dy = -\frac{x}{x^2 - 1} dx \\ &\stackrel{2.}{\implies} \int \frac{y}{y^2 - 1} dy = -\int \frac{x}{x^2 - 1} dx \\ \Rightarrow &\ln|y^2 - 1| + \ln|x^2 - 1| = \tilde{C} \\ \Rightarrow &(y^2 - 1)(x^2 - 1) = C \end{aligned}$$

Daraus folgt die allg. Lösung

$$y(x) = \pm \sqrt{1 + \frac{C}{x^2 - 1}}$$

1 Differentialgleichungen

mit C als Integrationskonstante und unter der Bedingung, dass $|x| \neq 1$.

$$\begin{aligned}y' &= g(ax + by + c) \\u &= ax + by + c \\ \Rightarrow y' &= \frac{1}{b}(u' - a) = g(u) \\ \Rightarrow u' &= a + bg(u)\end{aligned}$$

1.2.2 Homogene DGL

Gegeben ist die DGL der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{mit } x \neq 0, \quad (1.4)$$

d.h. die DGL muss so darstellbar sein, dass f von x und y nur noch in der Form $\frac{y}{x}$ abhängig ist, also z.B.

$$xy' = x - y \Leftrightarrow y' = 1 - \frac{y}{x} \equiv f\left(\frac{y}{x}\right)$$

aber NICHT

$$xy' = 1 - y \Leftrightarrow y' = \frac{1}{x} - \frac{y}{x} \neq f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Mittels der Substitution von

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}, \quad x \neq 0$$

lässt sich $y(x)$ schreiben als

$$\begin{aligned}y(x) &= x u(x) \\ \Rightarrow y' &= x u' + u \stackrel{(1.4)}{=} f(u),\end{aligned}$$

erhält man die Gleichung

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}, \quad x \neq 0. \quad (1.5)$$

Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen, die mit dem Verfahren aus 1.2.1 gelöst werden kann:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Zum Schluss muss noch rücksubstituiert werden und man erhält somit die allgemeine Lösung für die DGL (1.4) ([7]).

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \\
 \Leftrightarrow y' &= u - \frac{1}{u^2} = u + u' x \\
 \Leftrightarrow u' &= \frac{u - u^{-2} - u}{x} = -\frac{1}{xu^2} \\
 \Rightarrow \int u^2 du &= -\int \frac{dx}{x} \\
 \Leftrightarrow \frac{u^3}{3} &= -\ln x + \tilde{C} \\
 \Leftrightarrow u &= (C - 3 \ln x)^{\frac{1}{3}} \\
 \Leftrightarrow y &= x(C - 3 \ln x)^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

Dies ist die allgemeine Lösung mit C als Integrationskonstante.

1.2.3 Lineare DGL 1. Ordnung

Eine DGL der Gestalt

$$y' + g(x)y = h(x) \quad (1.6)$$

mit stetigen Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ über einem Intervall $I \subset \mathbb{K}$ nennt man LINEARE DGL 1. ORDNUNG. Ferner bezeichnet man die DGL als HOMOGEN, wenn die STÖRFUNKTION $h(x) = 0, \forall x \in I$, ansonsten als INHOMOGEN. Die Gleichung (1.6) lässt sich umschreiben zu

$$e^{-G(x)} \frac{d}{dx} \left(e^{G(x)} y \right) = h(x) \quad (1.7)$$

mit $G(x)$ als Stammfunktion von $g(x)$. Aus Gleichung (1.7) folgt somit

$$y(x) = e^{-G(x)} \left(C + \int e^{G(x)} h(x) dx \right) \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Für beliebige Anfangswerte $y_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ ergibt sich eine Lösung. Diese ist eindeutig und global für alle $x \in I$ durch die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ bestimmt und man erhält

$$y(x) = e^{-G(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x e^{G(\xi)} h(\xi) d\xi \right)$$

mit

$$G(x) = \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi.$$

1 Differentialgleichungen

Im homogenen Fall ($h(x) \equiv 0$) ergibt sich die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^{-G(x)}$$

mit der gleichen Stammfunktion $G(x)$. Die vollständige allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist somit die Linearkombination der homogenen und inhomogenen Lösung

$$y(x) = y_{inh}(x) + y_{hom}(x).$$

Beispiel: Freier Fall eines Körpers mit Reibung proportional zu v .

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} + kv - mg &= 0 \\ \Leftrightarrow \dot{v} + \frac{k}{m}v &= g \end{aligned}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist gegeben durch $v(0) = 0$.

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\frac{k}{m}t} \left(0 + g \int_0^t e^{\frac{k}{m}\tau} d\tau \right) \\ &= \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit nimmt also beim freien Fall kontinuierlich zu und nähert sich exponentiell der konstanten Endgeschwindigkeit $\lim_{t \rightarrow \infty} v_t = \frac{mg}{k}$ an.

1.2.4 Exakte DGL

Gegeben sei die DGL vom Typ

$$\begin{aligned} P(x, y) + Q(x, y)y' &= 0 \Leftrightarrow P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Leftrightarrow P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

mit reellwertigen Funktionen P, Q , welche sternförmig ist. Diese DGL heißt EXAKT, wenn es eine Funktion $F(x, y)$ gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} F(x, y) \equiv \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \nabla = (\partial_x, \partial_y). \quad (1.9)$$

$P(x, y)$ und $Q(x, y)$ seien in einem (offenen) einfach zusammenhängendem Gebiet G stetig partiell differenzierbar. Es existiert genau dann ein POTENTIAL $F(x, y)$ mit der Eigenschaft (1.9), wenn die INTEGRABILITÄTSBEDINGUNG

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y), \quad (1.10)$$

also die Rotationsfreiheit des Vektorfelds

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0}$$

erfüllt ist. Die Stammfunktion bzw. das Potential $F(x, y)$ lässt sich dann durch ein Kurvenintegral längs eines in G verlaufenden Weges von einem beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in G$ zum Punkt $(x, y) \in G$ berechnen.

Satz: SATZ ÜBER STAMMFUNKTIONEN. Sind die Funktionen $p(x, y)$, $u(x, y)$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet D stetig differenzierbar, so existiert eine Stammfunktion $F(x, y)$ genau dann, wenn

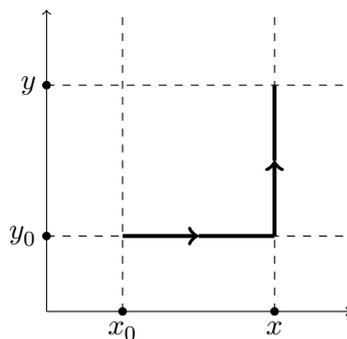
$$p_y \equiv u_x \quad \text{in } D$$

ist.

Man erhält eine Stammfunktion als Kurvenintegral

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{(\xi, \nu)}^{(\bar{x}, \bar{y})} \{p(x, y)dx + u(x, y)dy\},$$

wobei $(\xi, \nu) \in D$ ein fester Punkt ist und längs eines beliebigen, die Punkte (ξ, ν) und (\bar{x}, \bar{y}) verbindenden Streckenzuges integriert wird. Die Gleichung $p_y \equiv u_x$ ist gerade die Bedingung dafür, dass dieses Integral vom Wege unabhängig ist. Die Bedingung (1.10) garantiert, dass $F(x, y)$ nicht vom gewählten Weg abhängt. Bis auf eine additive Konstante ist das Potential eindeutig.⁴



⁴Diese Wegunabhängigkeit folgt aus $\oint d\vec{s}\vec{A}(\vec{c}) = \int d\vec{f}\text{rot}\vec{A} = 0$, dem Satz von Stokes.

1 Differentialgleichungen

Somit folgt aus (1.8) mit Gleichung (1.9), dass

$$\begin{aligned} 0 &\equiv P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) \\ &= F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x) \end{aligned}$$

und mit der Kettelregel

$$0 = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) \Rightarrow F(x, y(x)) = C.$$

Die explizite Lösung der DGL ergibt sich letztlich durch das Auflösen nach $y(x)$.

Beispiel: Um die ALLGEMEINE LÖSUNG einer exakten DGL

$$y \cos(xy) - 2x + x \cos(xy)y' = 0$$

zu finden, muss zuvor gezeigt werden, dass diese exakt ist.

$$P(x, y) = y \cos(xy) - 2x,$$

$$Q(x, y) = x \cos(xy),$$

$$\Rightarrow P_y(x, y) = \cos(xy) - xy \sin(xy),$$

$$Q_x(x, y) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$$

Die Bedingung (1.9) ist demnach erfüllt. Die allgemeine Lösung für $F(x, y)$ kann man folgendermaßen berechnen

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y) = \sin(xy) - x^2 + C(y) \quad (1.11)$$

Bestimmung von $C(y)$:

$$Q(x, y) = x \cos(xy) = F_y(x, y)$$

$$\stackrel{(1.11)}{=} x \cos(xy) + C'(y)$$

$$\Rightarrow C'(y) = 0$$

$$\Rightarrow C(y) = \text{const.}$$

Bestimmung von $y(x)$:

$$F(x, y(x)) = \tilde{C} = \text{const.}$$

$$\sin(xy(x)) - x^2 = \tilde{C}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x} \arcsin(\tilde{C} + x^2)$$

Dies ist die allgemeine Lösung für die DGL mit \tilde{C} als Integrationskonstante.

Der integrierende Faktor

Die Differentialgleichung

$$p = y \, dx + 2x \, dy = 0 \quad (1.12)$$

ist nicht exakt. Man kann sie aber leicht zu einer exakten Differentialgleichung machen, etwa im Gebiet $x > 0$ durch Multiplikation mit $1/\sqrt{x}$:

$$\frac{y}{\sqrt{x}} dx + 2\sqrt{x} dy = 0$$

ist exakt, eine Stammfunktion lautet

$$F(x, y) = 2y\sqrt{x} \quad (x > 0).$$

Auch durch Multiplikation von 1.12 mit y erhält man eine exakte Differentialgleichung

$$y^2 dx + 2xy \, dy = 0 \quad \text{mit } F(x, y) = xy^2.$$

Allgemein nennt man, wenn die Funktionen $p(x, y)$, $q(x, y)$ in D stetig sind, jede in D stetige Funktion $M(x, y) \neq 0$ einen **INTEGRIERENDEN FAKTOR** bezüglich der Differentialgleichung, wenn die Differentialgleichung

$$M(x, y)p(x, y)dx + M(x, y)q(x, y)dy = 0$$

exakt ist. Ist $p, q, M \in C^1$, so bedeutet das nach dem Satz über Stammfunktionen, dass $(Mp)_y = (Mq)_x$,

$$M_y p + M p_y = M_x q + M q_y$$

sein muss. Mit der Bestimmung eines Multiplikators M ist die Differentialgleichung im wesentlichen gelöst, die Stammfunktion $F(x, y)$ ergibt sich nach dem Satz über Stammfunktionen durch einfache Integrationen. Man beachte, dass es genügt, einen einzigen Multiplikator M zu finden, dass dies aber eine unter Umständen schwierige Aufgabe ist, da M Lösung einer partiellen Differentialgleichung ist.

Gelegentlich lässt sich ein Multiplikator bestimmen, welcher nur von x (oder nur von y) abhängt. Der Ansatz $M = M(x)$ führt auf

$$\frac{p_y - q_x}{u} = \frac{M'}{M} = (\log M)'$$

Ein solcher nur von x abhängiger Multiplikator existiert also genau dann, wenn die linke Seite von

1.2.5 Implizite DGL

Die DGL der Form

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

heißt **IMPLIZITE DGL**, wenn sie nicht nach der höchsten Ableitung auflösbar ist. Ist die DGL nach der höchsten Ableitung umgestellt, so nennt man sie **EXPLIZIT**. Sei

1 Differentialgleichungen

eine implizite DGL 1. Ordnung $F(x, y, y') = 0$ nach y auflösbar, also überführbar in die Darstellung

$$y = \varphi(x, y'), \quad (1.13)$$

so kann diese DGL durch eine Substitution gelöst werden. Sei $y' = p = p(x)$ die Substitution, so folgt

$$y - \varphi(x, p(x)) = 0$$

und weiterhin durch Differenziation

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (y - \varphi(x, p(x))) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dx} y - \frac{d}{dx} \varphi(x, p(x)) = 0 \\ \Leftrightarrow & y' - \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, p(x)) - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dx} = 0 \\ \Leftrightarrow & \underbrace{p(x) - \varphi_x(x, p(x))}_{P(x,p)} - \underbrace{\varphi_p(x, p(x))}_{Q(x,p)} p'(x) = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

also eine IMPLIZITE DGL für p . Die Lösung von (1.14) für $p(x)$ setzen wir in (1.13) ein, woraus sich die Lösung für $y(x)$ ergibt.

Beispiel:

$$y' + \log y' = y + x \quad \text{mit } y' > 0 \quad (1.15)$$

Die Gleichung (1.15) wird erst nach y aufgelöst und dann nach x abgeleitet. Daraus folgt

$$\begin{aligned} p &= p' + \frac{p'}{p} - 1 \\ \Leftrightarrow p' \left(1 + \frac{1}{p}\right) &= p \left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad \text{falls } p \neq -1, 0 \\ \Leftrightarrow p' &= p. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Lösung

$$p(x) (\equiv y'(x)) = C e^x \quad \text{mit } C > 0.$$

Einsetzen in (1.15) liefert

$$y(x) = C e^x + \log C.$$

1.2.6 Potenzreihenansatz

Mit der Annahme, dass die DGL n -ter Ordnung

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

oder die DGL 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x, y)$$

eine Lösung $y(x)$ besitzt und sich um $x = x_0$ als Potenzreihe darstellen lässt, wählt man den Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Die Ableitungen von $y(x)$ bestimmen sich zu

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n,$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-x_0)^n,$$

usw.

Dies kann man nun in die DGL einsetzen. Lässt sich die rechte Seite ebenfalls als Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad b_n = f_n(\{a_n\})$$

schreiben, so ergibt sich aus einem Koeffizientenvergleich die Bestimmungsgleichungen (meist Rekursionsformeln) für die unbekanntenen Koeffizienten a_n . Die somit gefundene Potenzreihe ist dann im Konvergenzintervall $x_0 - R < x < x_0 + R$ eine Lösung, sofern sie einen Konvergenzradius $R > 0$ besitzt. Häufig sind die ersten Koeffizienten durch Anfangsbedingungen vorgegeben. [7]

Beispiel:

$$y' = y + 2x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x$$

Koeffizientenvergleich für x^n liefert:

$$n = 0 \Rightarrow a_1 = a_0$$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = \frac{a_0 + 2}{2}$$

$$n \geq 2 \Rightarrow a_{n+1}(n+1) = a_n$$

1 Differentialgleichungen

Diese Rekursionsformel ergibt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)n} = \dots = \frac{a_2}{(n+1)n \dots 3} = \frac{2a_2}{(n+1)!} \\ &= \frac{a_0 + 2}{(n+1)!} \quad \text{für } n \geq 2 \\ \rightarrow y(x) &= a_0 + a_0 x + \frac{a_0 + 2}{2} x^2 + (a_0 + 2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= (a_0 + 2)e^x - 2(x + 1) \\ &= Ce^x - 2(x + 1) \quad \text{mit } C = a_0 + 2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.3 Existenz- und Eindeigkeitsatz

1.3.1 Picardsche Integralgleichung

Die explizite DGL 1. Ordnung

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit } y(x_0) = y_0 \tag{1.16}$$

ist äquivalent zur PICARDSCHEN INTEGRALGLEICHUNG

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \tag{1.17}$$

d.h. jede Lösung von (1.16) ist eine Lösung von (1.17) und umgekehrt.

Beweis:

(i) $y(x)$ sei eine Lösung von (1.16)

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{x_0}^x y'(t) dt}_{=y(x)-y_0} = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \hat{=} \text{Gl. (1.16)}$$

(ii) $y(x)$ sei Lösung von (1.17), Differenzieren von (1.16) $\Rightarrow y' = f(x, y)$

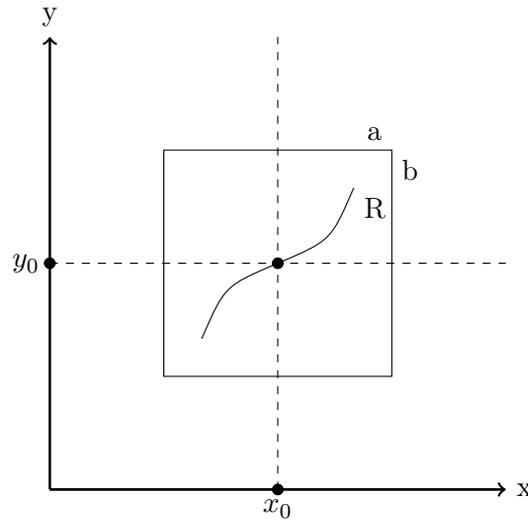
1.3.2 Lipschitzbedingung

R sei ein Rechteck in der $x - y$ -Ebene: $|x - x_0| \leq a$ und $|y - y_0| \leq b$.

Definition: Die Funktion $f(x, y)$ erfüllt in R eine LIPSCHITZBEDINGUNG bezüglich y , wenn eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R.$$

L heißt LIPSCHITZKONSTANTE. Wenn $f(x, y)$ eine Lipschitzbedingung erfüllt, dann ist $f(x, y)$ LIPSCHITZ-STETIG bezüglich y . Lipschitz-Stetigkeit ist stärker als Stetigkeit aber schwächer als Differenzierbarkeit. f erfüllt auf R LOKAL eine Lipschitzbedingung, wenn es zu jedem Punkt von R eine Umgebung U gibt, in der f eine Lipschitzbedingung erfüllt.



Beispiel: $f(x, y) = y^2$ erfüllt auf $R = \mathbb{R}^2$ zwar lokal eine Lipschitzbedingung aber nicht global, da

$$\left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| = |y_1 + y_2|$$

unbeschränkt auf \mathbb{R}^2 ist. [7, S.52] (Einschub 3.1)

Bemerkung: Falls f stetig partiell nach y differenzierbar ist und in R existiert, so erfüllt $f(x, y)$ bezüglich y eine Lipschitzbedingung in jedem $R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$. Dann ist

$$L = \max_R |f_y(x, y)|$$

eine mögliche Lipschitzkonstante. (Einschub 3.1)

1.3.3 Banachscher Fixpunktsatz

Definition: Ein BANACH-RAUM B ist ein vollständiger und normierter Vektorraum.

1 Differentialgleichungen

Beispiel:

- (i) \mathbb{R} mit $\|x\| = |x|$ ist ein Banach-Raum.
- (ii) \mathbb{R}^n mit $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ist ein Banach-Raum.
- (iii) $C(a, b) = \{u(x) \mid u(x) \text{ stetig für } a \leq x \leq b\}$ ist als Raum der stetigen Funktionen über dem Intervall $[a, b]$ mit

$$\|u\| = \max_{x \in [a, b]} |u(x)|$$

ein Banach-Raum. Eine Folge stetiger Funktionen, die bezüglich der Maximumsnorm konvergiert, konvergiert gleichmäßig auf dem Intervall $[a, b]$ und hat demnach eine stetige Grenzfunktion.

Die Maximumsnorm erfüllt die Eigenschaften einer Norm (3.6.1). Wenn jede CAUCHY-FOLGE auf ein Element des Raumes hin konvergiert, so nennt man den Raum VOLLSTÄNDIG. Konvergiert eine Funktionenfolge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf einem Intervall $[a, b]$ bzgl. der Maximumsnorm, d.h. es gilt

$$\exists m, n > N \in \mathbb{N} : \|u_n(x) - u_m(x)\| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0,$$

so liegt gleichmäßige Konvergenz auf dem Intervall $[a, b]$ vor. Gleichmäßige Konvergenz impliziert eine stetige Grenzfunktion $u(x)$ [1, S. 36f.] (3.2).

Satz: BANACHSCHER FIXPUNKTSATZ

Es sei D eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge eines Banach-Raums B und $P : D \rightarrow D$ eine Abbildung mit

$$\|Pu_1 - Pu_2\| \leq q \|u_1 - u_2\|; \quad q < 1; \quad u_1, u_2 \in D$$

wobei P als KONTRAKTION wegen $q < 1$ bezeichnet wird. Dann besitzt P genau einen Fixpunkt y in D , d.h. es gibt genau ein $y \in D$, für das gilt

$$Py = y.$$

Beweis: Es sei $y_0 \in D$ beliebig und $y_{i+1} = Py_i$ für $i = 0, 1, 2, \dots$ die Iteration von P .

$$\|y_{i+1} - y_i\| = \|Py_i - Py_{i-1}\| \leq q \|y_i - y_{i-1}\| \leq \dots \leq q^i \|y_1 - y_0\|$$

Schreibe $y_m - y_n$ ($m > n$) als

$$\begin{aligned} y_m - y_n &= y_m - y_{m-1} - y_{m-2} + \dots + y_{n+2} + y_{n+1} - y_n = \sum_{i=n}^{m-1} (y_{i+1} - y_i) \\ \Rightarrow \|y_m - y_n\| &\stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} \sum_{i=n}^{m-1} \|y_{i+1} - y_i\| \stackrel{P_{y_i=y_{i+1}}}{\leq} \|y_1 - y_0\| \sum_{i=n}^{m-1} q^i \leq \|y_1 - y_0\| \frac{q^n - q^m}{1 - q} \end{aligned}$$

mit $m > n$ und $q < 1$ folgt somit

$$\begin{aligned} &\Rightarrow q^n > q^m \\ \Rightarrow q^n - q^m &< q^n \\ \|y_m - y_n\| &\leq \|y_1 - y_0\| \frac{q^n}{1-q} \\ \Rightarrow \|y_m - y_n\| &\rightarrow 0 \quad \text{mit } m, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Somit ist $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ eine CAUCHY-FOLGE in D . Daher existiert ein $y \in D$ mit $y_n \rightarrow y$, d.h. $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dieses y erfüllt die Fixpunktgleichung $Py = y$, denn

$$\|Py - y\| = \|Py - Py_i + y_{i+1} - y\| \leq q \|y - y_i\| + \|y_{i+1} - y\| \quad \forall i.$$

Mit $i \rightarrow \infty$ folgt

$$\|Py - y\| = 0 \quad \Rightarrow \quad Py = y.$$

Beweis:

Eindeutigkeit

y und \tilde{y} sollen beide die Fixpunktgleichung erfüllen, d.h. $Py = y$ und $P\tilde{y} = \tilde{y}$

$$\begin{aligned} \|y - \tilde{y}\| &= \|Py - P\tilde{y}\| \leq q \|y - \tilde{y}\| \xrightarrow{(q < 1)} \|y - \tilde{y}\| = 0 \\ &\Rightarrow y = \tilde{y} \end{aligned}$$

1.3.4 Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard/Lindelöf

Satz: Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig im Rechteck R :

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b.$$

Ebenfalls erfülle sie in R eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich y . Dann hat die DGL zu jedem $(x_0, y_0) \in R$

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

für $|x - x_0| \leq a$ genau eine Lösung.

Beweis: Seien $J = \{x \mid |x - x_0| \leq a\}$ und $B = \{u(x) \mid u(x) \text{ stetig für } x \in J\}$ mit $\|u\| = \max_J |u(x)|$ ein Banach-Raum. Die Abbildung P

$$(Pu)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt$$

1 Differentialgleichungen

ist eine Abbildung von B in sich selbst. Das Integral existiert, weil $f(t, u(t))$ eine in t stetige Funktion ist. Daraus folgt, dass $(Pu)(x)$ nicht nur stetig, sondern sogar stetig differenzierbar ist mit $(Pu)'(x) = f(x, u(x))$. Zudem ist P eine Kontraktion, denn

$$\begin{aligned} |(Pu)(x) - (Pv)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \{f(t, u(t)) - f(t, v(t))\} dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| dt \right| \\ &\leq |x - x_0| \max_{t \in J} |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| \end{aligned}$$

Nach Anwenden der Lipschitzstetigkeit folgt

$$\begin{aligned} &\leq |x - x_0| \max_{t \in J} L |u(t) - v(t)| \\ &\leq aL \|u - v\| \\ \Rightarrow \| (Pu) - (Pv) \| &\leq aL \|u - v\|. \end{aligned}$$

Mit der Bedingung $aL < 1$ lässt sich der Banachsche Fixpunktsatzes anwenden, somit gibt es genau ein $y \in B$ mit

$$\begin{aligned} Py &= y \\ \Leftrightarrow y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \end{aligned}$$

Damit besitzt die DGL $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$ in J genau eine Lösung.

Beispiel: Die DGL

$$y' = y^2 \quad \text{mit } y(0) = 1 \tag{1.18}$$

erfüllt wegen

$$\left| y_1^2 - y_2^2 \right| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2|$$

in jedem endlichen Rechteck $R : |x| \leq a, |y - 1| \leq b$ eine Lipschitzbedingung mit $L = 2(b + 1)$. Da aber L mit der Höhe des Rechtecks anwächst, gibt es keine globale Lipschitzkonstante. Die Lösung $y(x) = \frac{1}{1-x}$ hat zwar bei $x = 1$ eine Singularität. Dennoch existiert z.B. im Intervall $|x| \leq \frac{1}{2}$ eine eindeutige Lösung.

1.3.5 Bemerkungen und Ergänzungen

Picard-Iteration

Der Satz von Picard/Lindelöf impliziert, dass sich die Lösung $y(x)$ als Grenzwert einer Folge von Funktionen $y_n(x)$ gewinnen lässt. Sei nun

$$y_0(x) \equiv y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt. \quad (1.19)$$

Dabei ist die Wahl einer konstanten Startfunktion $y_0(x) \equiv y_0$ nicht zwingend, aber häufig bequem. Somit gilt:

$$y_n(x) \rightarrow y(x) \text{ gleichmäßig für } x \in J, \text{ im Limes } n \rightarrow \infty.$$

Dieses Verfahren, insbesondere (1.19) heißt PICARD-ITERATION. Entwickelt man die Funktionen-Folge $(y_n(x))_n$ gemäß obiger Regel, so erhält man im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ die Lösung $y(x)$ der DGL. Dieses Entwicklungsverfahren nennt man Picard-Iteration. Die einzelnen Funktionen $y_n(x)$ bezeichnet man als Picard-Iterierte.

Beispiel:

$$y' = 2xy$$

mit $y(0) = 1$. Wir setzen $y_{(0)}(x) \equiv 1$, daraus folgt

$$\begin{aligned} y_{(1)}(x) &= 1 + \int_0^x 2t \cdot 1 \, dt = 1 + x^2, \\ y_{(2)}(x) &= 1 + \int_0^x 2t(1 + t^2) \, dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}, \\ y_{(3)}(x) &= 1 + \int_0^x 2t \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2} \right) dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!}, \\ y_{(n)}(x) &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}. \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion erhält man

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = e^{x^2}.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus der Lipschitzbedingung. Für ihre bloße Existenz genügt die Stetigkeit von $f(x, y)$.

Satz: (von Peano)

Es sei $f(x, y)$ stetig in einem Rechteck $R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, wobei (x_0, y_0) der Mittelpunkt des Rechtecks R ist. In R existiert ein Maximum

$$M = \max_R |f(x, y)|$$

1 Differentialgleichungen

des Betrags der Funktion $f(x, y)$. Ferner sei h das Minimum

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Dann existiert im Intervall

$$|x - x_0| \leq h$$

mindestens eine Lösung der DGL

$$y' = f(x, y)$$

mit $y(x_0) = y_0$. Die Stetigkeit alleine reicht jedoch nicht aus, um die Eindeutigkeit der Lösung zu sichern.

Beweis: siehe [9, S. 76]

Beispiel: Es sei

$$\begin{aligned} y(x) = x|x| &= \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow y' = 2|x| &= \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \\ &= 2\sqrt{|y|} \end{aligned}$$

Also erhält man die DGL $y' = 2\sqrt{|y|}$ mit $y(0) = 0$. Zu dieser DGL existieren weitere Lösungen, z.B.

$$y = 0, \quad y = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Denn

$$f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$$

ist zwar stetig, erfüllt aber keine Lipschitzbedingung in der Umgebung von $y = 0$. D.h. $\nexists L > 0$, so dass

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_i) \in R$$

also

$$\frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L$$

gilt. Denn für $|y_1 - y_2| \rightarrow 0$ mit $y_1 = 0$ geht

$$\frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \rightarrow \infty.$$

1.4 Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung

Definition: Ein SYSTEM VON n GEWÖHNLICHEN DGL 1. ORDNUNG lässt sich schreiben als

$$y'_v = f_v(x, y_1, \dots, y_n) \quad \text{mit } v = 1, 2, \dots, n$$

oder äquivalent

$$\vec{y}' = \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$.

Definition: GEWÖHNLICHE DGL n -TER ORDNUNG ($n > 1$) lassen sich schreiben als

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

mit der Anfangsbedingung $\vec{y}^{(i)}(x_0) = \vec{y}_0^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$).

1.4.1 Zusammenhang zwischen einem System von n DGL 1. Ordnung und einer DGL n -ter Ordnung

Gegeben sei eine DGL n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.20)$$

Um den Zusammenhang zu einem System von n linearen DGL zu zeigen, transformiere man zunächst die Variablen $y^{(i)}$ zu $y^{(i)} \mapsto y_{i+1}$ und fasse diese als Vektor der Form

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

zusammen. Hiermit lässt sich ein System von n linearen DGL der Form

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_3(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \\ F(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad (1.21)$$

konstruieren und folglich ist

$$y_1(x) = \int y'_1 dx = \int y_2 dx = y$$

die Lösung der Gleichung (1.20).

1.4.2 Existenz- und Eindeigkeitssatz

Analog zu Kapitel (1.3) definiere man als Norm eines Vektors

$$\|\vec{z}\| := \max_{v=1,\dots,n} |z_v|.$$

Das System von n DGL mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ ist äquivalent zu

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt.$$

Es sei nun $\|\vec{f}(x, \vec{y})\| \leq M$ in einem Quader $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\|x - x_0\| \leq a$ und $\|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq b$ definiert; ferner sei \vec{f} stetig in D . Weiterhin gelte die lokale Lipschitzbedingung

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{z})\| \leq L \|\vec{y} - \vec{z}\|. \quad (1.22)$$

in D , sodass es genau eine Lösung gibt. Dies ist insbesondere der Fall, wenn $f_i \in C^1(D)$. Außerdem definiert man eine vektorwertige Picard-Transformation

$$\vec{z}(x) \longrightarrow (P\vec{z})(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{z}(t)) dt.$$

Dann besitzt das System von DGL mit der Anfangsbedingung $\vec{y}_0 = \vec{y}(x_0)$ in

$$I : |x - x_0| < h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

die eindeutige Lösung $\vec{y}(\vec{x})$. [2]

Also gilt analog

Der Existenzsatz von Peano:

Die vektorwertige Funktion $\vec{f}(x, \vec{y})$ sei in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig, und es sei $(\xi, \nu_0, \dots, \nu_{n-1}) \in D$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (AWP) der Gleichung $y' = \frac{1+y}{1-\frac{y}{x}}$ mit der Anfangsbedingung $\vec{f}(x_0, \vec{y}_0) = \vec{f}_0$ mindestens eine Lösung. Außerdem lässt sich jede Lösung bis zum Rand ∂D von D fortsetzen [9, S.134].

1.4.3 Direkt integrierbare DGL n -ter Ordnung

Sei eine DGL folgendermaßen darstellbar: ⁵

$$F(y^{(n)}, x) = 0 \longrightarrow y^{(n)} = f(x)$$

Dann erhält man die Lösung durch sukzessive Integration

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(x) &= \int_{x_0}^x f(x_1) dx_1 + C_1 \\ y^{(n-2)}(x) &= \int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 + C_1(x - x_0) + C_2 \\ &\vdots \\ y(x) &= \int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n + C_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_n \end{aligned} \quad (1.23)$$

Das Mehrfachintegral in Gl. (1.23) lässt sich vereinfachen, gemäß der Form

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x dx_1 \int_{x_0}^{x_1} f(x_2) dx_2 &= \int_{x_0}^x dx_2 \int_{x_2}^x f(x_2) dx_1 \\ &= \int_{x_0}^x (x - x_2) f(x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Damit lässt sich Gleichung (1.23) schreiben als

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x - x_1)^{n-1} f(x_1) dx_1 + \sum_{i=1}^n C_i \frac{(x - x_0)^{n-i}}{(n-i)!}.$$

Beispiel: Teilchen, die einer zeitabhängigen Kraft $f(t)$ unterliegen

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= f(t) \\ \Rightarrow x(t) &= \int_{t_0}^t (t - t_1) f(t_1) dt_1 + x(t_0) + v(t - t_0) \end{aligned}$$

⁵ gestattet Quadratur

1.4.4 Lineare DGL n -ter Ordnung

Definition: Lässt sich eine gewöhnliche DGL n -ter Ordnung in der Form

$$y^{(n)}(x) + g_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + g_n(x)y(x) = h(x)$$

schreiben, so heißt sie LINEAR. Für $h(x) = 0$ nennt man die DGL HOMOGEN, für $h(x) \neq 0$ INHOMOGEN.

Anwendung des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes:

Sind $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), h(x)$ stetig in einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so existiert für jedes

$$x_0 \in I, \quad y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$$

eine eindeutige Lösung der DGL, die die Anfangsbedingung

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}$$

mit $i = 0, 1, \dots, n - 1$ erfüllt.

1.4.4.1 Homogene lineare DGL n -ter Ordnung

Superpositionsprinzip

Mit zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der homogenen DGL ist auch jede Linearkombination $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ eine Lösung. Die Lösungen erzeugen einen n -dimensionalen Vektorraum der Polynome in \mathbb{R} .

Definition: Hat man n linear unabhängige, spezielle Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, so lässt sich jede Lösung $y(x)$ als Linearkombination dieser Lösungen entwickeln:

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) \text{ mit } C_i \in \mathbb{R}$$

Die Lösungen $\{y_i(x)\}_i$ werden FUNDAMENTALSYSTEM genannt und sind ein minimales Erzeugendensystem (Basis) des Lösungsraums, wenn für jedes $\{y_i(x)\}_i$ folgende Definition gilt.

Definition: Ein Satz von Funktionen $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\} \rightarrow \{y_i(x)\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ heißt LINEAR UNABHÄNGIG, falls gilt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i(x) \equiv 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

1.4 Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung

Definition: Das äquivalente DGL-System kann man auch mittels einer WRONSKI-DETERMINANTE (W) analysieren.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n, x) := \det \Phi(x)$$

$$\text{mit } \Phi(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Satz: Die Wronski-Determinante eines Lösungssystems $W(y_1, y_2, \dots, y_n, x) = \det \Phi(x)$ genügt zum Finden eines Hauptsystems, da die Lösungen auf einem Intervall I linear unabhängig sind, wenn die Wronski-Determinante an einem Punkt $x_0 \in I$ von Null verschieden ist. Das Nichtverschwinden der Wronski-Determinante ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass ein Hauptsystem vorliegt. [9, S.173]

Beispiel: Die DGL

$$y''' - \frac{6}{x^2}y' + \frac{12}{x^3}y = 0 \quad \text{mit } x > 0$$

hat die Lösungen

$$y_1 = x^{-2}, \quad y_2 = x^2 \quad \text{und} \quad y_3 = x^3.$$

Somit ergibt sich für die Wronski-Determinante:

$$W(y_1, y_2, y_3, x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{-2} & x^2 & x^3 \\ -2x^{-3} & 2x & 3x^2 \\ 6x^{-4} & 2 & 6x \end{vmatrix} = 20 \neq 0$$

$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ bilden also ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung lässt sich schreiben als

$$y(x) = C_1 x^{-2} + C_2 x^2 + C_3 x^3.$$

1.4.4.2 Inhomogene lineare DGL n -ter Ordnung

Sei die DGL n -ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + g_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + g_n y(x) = h(x) \neq 0 \quad (1.24)$$

gegeben, so hat sie die allgemeine Lösung

$$y_{inh}(x) = \underbrace{y_{spez}(x)}_{\text{spezielle Lsg. der inhomogenen Gl.}} + \underbrace{y_{hom}(x)}_{\text{allgemeine Lsg. der homogenen Gl.}}$$

mit

$$y_{hom}(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x),$$

das aus dem Fundamentalsystem $\{y_i(x)\}_i$ gebildet wird. Das Ziel besteht nun darin die spezielle Lösung der DGL mit Hilfe eines

1 Differentialgleichungen

Variationsansatzes

zu finden:

$$y_{\text{spez}} = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i(x),$$

wobei die Konstanten C_i nun "variiert" werden und somit Funktionen von x sind. Für die Ableitung von y_{spez} gilt

$$y'_{\text{spez}} = \sum_{i=1}^n (C'_i y_i + C_i y'_i).$$

Es wird gefordert:

$$\sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(k)} \equiv 0, \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, n-2.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} y'_{\text{spez}} &= \sum_{i=1}^n C_i y'_i \\ &\vdots \\ y_{\text{spez}}^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-1)} \\ y_{\text{spez}}^{(n)} &= \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} \end{aligned}$$

Einsetzen in (1.24) ergibt:

$$\sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n C_i \underbrace{\left(y_i^{(n)} + g_1 y_i^{(n-1)} + \dots + g_n y_i \right)}_{=0} = h(x)$$

Damit erhält man ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für C'_1, \dots, C'_n :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ \vdots \\ C'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(x) \end{pmatrix}$$

Auflösen nach C'_i liefert:

$$C'_i = \frac{(-1)^{n+i}}{W(\xi)} h(x) W_i(\xi),$$

1.4 Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung

wobei $W_i(\xi)$ die Wronski-Determinante von $(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ ist. Damit folgt für $C_i(x)$

$$C_i(x) = (-1)^{i+n} \int_{x_0}^x \frac{h(\tilde{x})W_i(\tilde{x})}{W(\tilde{x})} d\tilde{x}$$

und man erhält für y_{spez} :

$$y_{\text{spez}}(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} y_i(x) \int_{x_0}^x \frac{h(\xi)W_i(\xi)}{W(\xi)} d\xi$$

Beispiel:

$$y''' - \frac{6}{x^2}y' + \frac{12}{x^3}y = 20x \quad (1.25)$$

mit dem Fundamentalsystem

$$\Rightarrow W = \begin{vmatrix} x^{-2} & x^2 & x^3 \\ -2x^{-3} & 2x & 3x^2 \\ 6x^{-4} & 2 & 6x \end{vmatrix} = 20$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} y_2' & y_3' \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = x^4 \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1' & y_3' \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = 5 \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \int_{x_0}^x \frac{20\tilde{x} \cdot \tilde{x}^4}{20} d\tilde{x} = (x^6 - x_0^6) \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow C_2(x) = - \int_{x_0}^x \frac{20\tilde{x} \cdot 5}{20} d\tilde{x} = -\frac{5}{2} (x^2 - x_0^2)$$

$$\Rightarrow C_3(x) = \int_{x_0}^x \frac{20\tilde{x}}{20} \cdot \frac{4}{\tilde{x}} d\tilde{x} = 4(x - x_0)$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL bestimmen:

$$y_{\text{spez}} = \sum_{i=1}^3 C_i y_i = \frac{5}{3}x^4 - \frac{x_0^6}{6}x^{-2} + \frac{5x_0^2}{2}x^2 - 4x_0x^3$$

*

(*) Hier kann man $x_0 = 0$ setzen. Ebenfalls sind dies auch die Lösungen der homogenen DGL. Daher spielen sie für die partikuläre Lösung keine Rolle.

1 Differentialgleichungen

1.4.4.3 Lineare DGL 2. Ordnung

Ein wichtiger Spezialfall der Physik ist die lineare DGL 2. Ordnung

$$y''(x) + g_1(x)y'(x) + g_2(x)y(x) = h(x)$$

(A.) Homogener Fall:

$$h(x) = 0$$

$$y''(x) + g_1(x)y'(x) + g_2(x)y(x) = 0 \quad (1.26)$$

Für die Wronski-Determinante ergibt sich:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2, x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ \Rightarrow \frac{dW(y_1, y_2, x)}{dx} &= y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \end{aligned}$$

Gl. (1.26) nach $y''(x)$ auflösen und einsetzen

$$\begin{aligned} &= y_1 (-g_1 y_2' - g_2 y_2) - y_2 (-g_1 y_1' - g_2 y_1) \\ &= -g_1 y_1 y_2' - g_2 y_1 y_2 + g_1 y_1 y_2' + g_2 y_1 y_2 \\ &= -g_1 (y_1 y_2' - y_2 y_1') \\ &= -g_1 W(y_1, y_2, x) \\ \Rightarrow \frac{dW}{W} &= -g_1(x) dx \\ \Rightarrow \ln(W) - \underbrace{\ln(W_0)}_{\text{Int. Konstante}} &= - \int_{x_0}^x g_1(\tilde{x}) d\tilde{x} \end{aligned}$$

(B.) Inhomogener Fall

$$h(x) \neq 0$$

$$y''(x) + g_1(x)y'(x) + g_2(x)y(x) = h(x)$$

Aus Abschnitt 1.4.4 folgt:

$$\begin{aligned} y_{\text{spez}} &= u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \\ \text{mit } u_1(x) &= - \int_{x_0}^x \frac{h(\tilde{x})y_2(\tilde{x})}{W(\tilde{x})} d\tilde{x} \\ u_2(x) &= \int_{x_0}^x \frac{h(\tilde{x})y_1(\tilde{x})}{W(\tilde{x})} d\tilde{x} \end{aligned}$$

1.4 Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung

Beispiel: Bewegungsgleichung des 1D harmonischen Oszillators, getrieben durch eine harmonische Kraft $F(t) = A \cos(\omega t)$:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t)$$

linear unabhängige Lösung (der homogenen Gl.):

$$x_1(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$x_2(t) = \sin(\omega_0 t)$$

Wronski-Det.:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{vmatrix} = \omega_0$$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\frac{A}{\omega_0} \int_{t_0}^t \sin(\omega_0 \tilde{t}) \cos(\omega \tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\cos(\omega_0 t) \cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\cos(\omega_0 t_0) \cos(\omega t_0) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t_0) \sin(\omega t_0)}_{\equiv C_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{A}{\omega_0} \int_{t_0}^t \cos(\omega_0 \tilde{t}) \cos(\omega \tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\sin(\omega_0 t) \cos(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \sin(\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\sin(\omega_0 t_0) \cos(\omega t_0) + \frac{\omega}{\omega_0} \cos(\omega_0 t_0) \sin(\omega t_0)}_{\equiv C_2} \right) \end{aligned}$$

$$x_{\text{spez}}(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$$

Die Terme proportional zu C_1 und C_2 spielen für die spezielle Lösung keine Rolle, denn $x_1(t)$ und $x_2(t)$ erfüllen die homogene DGL.

Damit folgt für die spezielle Lösung der inhomogenen DGL:

$$x_{\text{spez}}(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

1.4.5 Lineare DGL mit konst. Koeffizienten

Sei eine DGL der Form

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n y(x) = h(x),$$

mit der Einschränkung, dass $\forall i = 1, \dots, n : g_i(x) = a_i = \text{konstant}$ sind, gegeben. Dann nennt man diese DGL LINEAR MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN.

1.4.5.1 Allgemeine Theorie

Die Lösung dieser DGL mit der Inhomogenität $h(x) \neq 0$ lässt sich analog zu der (allgemeinen) inhomogenen linearen DGL n -ter Ordnung bestimmen. Jedoch lässt sich bei der Bestimmung der Lösung der homogenen Form das Fundamentalsystem durch einen einfachen Ansatz, dem D'ALEMBERTSCHEN ANSATZ MIT $y(x) = e^{\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), finden. Es wird nun im Folgenden die homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten betrachtet. Setzt man den D'Alembertschen Ansatz in die DGL ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n &= 0 =: \Phi(\lambda) \end{aligned}$$

$\Phi(\lambda)$ nennt man das charakteristische Polynom n -ter Ordnung.

Gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra besitzt ein Polynom n -ten Grades maximal n verschiedene Nullstellen.

1. Das heißt sofern keine Entartung vorliegt, sind alle λ_i ($\forall i = 1, \dots, n$) paarweise verschieden

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j.$$

Dann bilden die Lösungen

$$y_i(x) = e^{\lambda_i x} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem für die DGL.

2. Liegt beispielsweise für die j -te Nullstelle λ_j eine k -fache Entartung vor, so gilt

$$\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+k-1} = \lambda_{j+k}$$

und die k linear unabhängigen Funktionen dieses Unterraums des Fundamentalsystems sind

$$y_j(x) = e^{\lambda_j x}, y_{j+1}(x) = x e^{\lambda_j x}, \dots, y_{j+k}(x) = x^k e^{\lambda_j x}.$$

Anmerkung: Überprüfen des Fundamentalsystems mit Hilfe der Wronski-Determinante liefert

$$\begin{aligned} W(\lambda_1, \dots, \lambda_n, x) &= \left| (\lambda_j^{i-1} e^{\lambda_j x})_{ij} \right| = \exp \left[\sum_j \lambda_j x \right] \left| (\lambda_j^{i-1})_{ij} \right| \\ &= \exp \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j x \right] \prod_{i>1} (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass auch komplexe Nullstellen auftreten können.

1.4 Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung

Beweis: zur Existenz des Fundamentalsystems siehe [9]

Beispiel: Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Das charakteristische Polynom

$$\Phi(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2}$.

Fallunterscheidung der Lösungen:

$$a_1^2 > 4a_2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}; \quad y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (\text{Kriechfall})$$

$$a_1^2 = 4a_2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}; \quad y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} \quad (\text{aperiodischer Grenzfall})$$

$$a_1^2 < 4a_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \alpha \pm i\beta & y(x) &= e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \\ \text{mit } \alpha &= -\frac{a_1}{2} \\ \text{und } \beta &= \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} \end{aligned} \quad (\text{Schwingfall})$$

1.4.5.2 Eulersche DGL

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0 \quad (1.27)$$

Vorgehensweise:

Zu Beginn soll x erst einmal auf positive Werte beschränkt sein. Ist $y(x)$ eine Lösung, dann ist auch $y(|x|)$ eine Lösung. Also

$$x = x(t) = e^t.$$

Ist $y(x)$ eine Lösung der DGL, so gilt

$$y(x) = y(e^t) =: u(t), \quad u(x(t)) \in \mathbb{R}.$$

1 Differentialgleichungen

$u(x)$ ist beliebig oft differenzierbar und es folgt

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y' e^t = y' x \\ \frac{d^2 u}{dt^2} &= y' x + y'' x^2 \\ \frac{d^3 u}{dt^3} &= y' x + 3y'' x^2 + y''' x^3 \\ &\vdots \\ b_n \frac{d^n u}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 u &= 0\end{aligned}$$

Vergleicht man diese DGL mit der DGL 1.27, erkennt man eine Verknüpfung zwischen den Koeffizienten a_i und b_i , wobei die erhaltene DGL nun leichter lösbar ist.

1.4.6 Lineare Systeme

Definition: Sei

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$$

gegeben, wobei

$$\vec{y}'(x) = (y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)), \quad A(x) = (a_{ij}(x))$$

und

$$\vec{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x))$$

sind. So nennt man dies ein LINEARES SYSTEM VON n GEWÖHNLICHEN DGL. $A(x)$ ist eine $n \times n$ -Matrix. Im HOMOGENEN FALL gilt $\vec{b}(x) = 0$, ansonst INHOMOGEN.

1.4.6.1 Charakteristik der Lösung

- Die n linear unabhängigen Lösungen $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ bilden ein FUNDAMENTALSISTEM.
- Die Lösungen $\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)$ sind linear unabhängig, wenn die Wronski-Determinante des Systems ungleich Null ist. $W(x) = \det Y(x)$ mit

$$Y(x) = (\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)) \quad (1.28)$$

- Die allgemeine Lösung ist:

$$\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^n C_i \vec{y}_i(x)$$

1.4 Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung

Die Wronski-Determinante lässt sich schreiben als

$$W(x) = W(x_0) \exp \left[\int_{x_0}^x \text{Sp}(A(t)) dt \right].$$

Gilt für die Anfangsbedingungen $Y(x_0) = \mathbb{1}$, so spricht man von einem HAUPTSYSTEM. Die Lösung des homogenen Systems mit dieser Anfangsbedingung ist

$$\vec{y}(x) = Y(x)\vec{y}_0.$$

Beweis: durch Ableitung nach x . Siehe 1.4.4 für den Spezialfall.
Aus (1.21) folgt: $Y'(x) = A(x)Y(x)$

Inhomogener Fall:

$$\vec{b}(x) \neq 0 \text{ [9, S.179.f]}$$

Satz: Man erhält sämtliche Lösungen $\vec{y}(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung in der Form

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_{inh}(x) + \vec{y}_{hom}(x),$$

wobei $\vec{y}_{inh}(x)$ die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist und $\vec{y}_{hom}(x)$ alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung durchläuft.

Beweis: Dieser beruht, wie im eindimensionalen Fall auf der einfachen Tatsache, dass die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung eine Lösung der homogenen Differentialgleichung darstellt. (siehe [9])

1.4.6.2 Methode der Variation der Konstanten

Auch in diesem Fall funktioniert diese Methode zur Bestimmung einer Lösung. $Y(x)$ ist ein Hauptsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung. Die Konstanten werden wieder durch Funktionen von x ersetzt und man erhält eine homogene Gleichung der Form

$$\vec{u}(x) = Y(x)\vec{c}(x).$$

$\vec{c}(x)$ muss so gewählt werden, dass $\vec{u}(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL ist. Dafür wird die Bedingung zu

$$\vec{u}'(x) = Y'(x)\vec{c}(x) + Y(x)\vec{c}'(x) = A(x)Y(x)\vec{c}(x) + \vec{b}(x)$$

bestimmt. Das heißt

$$Y(x)\vec{c}'(x) = \vec{b}(x).$$

1 Differentialgleichungen

Da $Y(x)$ ein Hauptsystem ist, ist die Wronski-Determinante $\det Y \neq 0$, die inverse Matrix $Y^{-1}(x)$ existiert und ist in J stetig. Durch linksseitige Multiplikation mit der inversen Matrix erhält man

$$\vec{c}(x) = \vec{c}(\xi) + \int_{\xi}^x Y^{-1}(s)\vec{b}(s) ds.$$

Somit ergibt sich als partikuläre Lösung für das inhomogene System mit z.B. $\vec{c}(\xi) = 0$

$$\vec{y}'(x) = Y(x) \int_{\xi}^x Y^{-1}(s)\vec{b}(s) ds.$$

Satz: Das Anfangswertproblem $(A(x), \vec{b}(x))$ sind stetig in J , $\xi \in J$)

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x), \quad \vec{y}(\xi) = \vec{y}_0$$

hat die (eindeutig bestimmte) Lösung

$$\vec{y}(x) = Y(x)\vec{y}_0 + \int_{\xi}^x Y(x)Y^{-1}(s)\vec{b}(s) ds,$$

wobei $Y(x)$ das Hauptsystem der homogenen Differentialgleichung mit $Y(\xi) = \mathbb{1}$ ist.

Beispiel: Das homogene System

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{x}y_1 - y_2, \\ y_2' &= \frac{1}{x^2}y_1 + \frac{2}{x}y_2 \end{aligned}$$

mit $x \neq 0$ lässt sich schreiben als

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Struktur von A wähle man den Ansatz

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \alpha x^{n_1} \\ \beta x^{n_2} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} \alpha n_1 x^{n_1-1} \\ \beta n_2 x^{n_2-1} \end{pmatrix},$$

1.4 Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung

erhält durch Einsetzen in $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ für die Koeffizienten

$$n_1 = 2, n_2 = 1, \alpha = -\beta$$

und somit die Lösung

$$\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}$$

und durch einen Separationsansatz

$$\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -x^2 \ln(x) \\ x(1 + \ln(x)) \end{pmatrix}.$$

Per Definition ist

$$Y(x) = (\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x)) = \begin{pmatrix} x^2 & -x^2 \ln(x) \\ -x & x(1 + \ln(x)) \end{pmatrix}$$

und damit

$$Y(x_0 = 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hieraus lässt sich für $x_0 = 1$ ein Hauptsystem konstruieren:

$$Y(x) = (\vec{y}_1(x) + \vec{y}_2(x), \vec{y}_2(x)) = \begin{pmatrix} x^2(1 - \ln(x)) & -x^2 \ln(x) \\ x \ln(x) & x(1 + \ln(x)) \end{pmatrix}$$

mit

$$Y(1) = \mathbb{1}.$$

Nächster Schritt ist die Lösung der inhomogenen gekoppelten DGL 1. Ordnung

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$$

mit

$$\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x^2 \end{pmatrix}.$$

Nutze

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow M^{-1} &= \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \\ Y^{-1}(x) &= \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} x(1 + \ln(x)) & x^2 \ln(x) \\ x & x^2 \end{pmatrix} \\ Y^{-1}(x)\vec{b}(x) &= \frac{1}{x} \begin{pmatrix} \ln(x) + 1 - x^2 \ln(x) \\ 1 - x^2 \end{pmatrix} \\ \vec{y}_{spez}(x) &= Y(x) \int_1^x Y^{-1}(t)\vec{b}(t)dt \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x^2(x^2 - 1 + 2 \ln(x) - 2 \ln^2(x)) \\ x(3 - 3x^2 + 2 \ln(x) + 2 \ln^2(x)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1 Differentialgleichungen

Dies entspricht einer speziellen Lösung der inhomogenen DGL.

1.4.7 Lineare Systeme mit konst. Koeffizienten

Bislang war die Matrix $A(x)$ (prinzipiell) abhängig von x . Jetzt soll sie nur noch aus konstanten Koeffizienten bestehen. Mit der Exponentialreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

erhält man die Matrix-Exponentialfunktion

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \mathbb{1} + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} k t^{k-1} A^k \\ &= A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j \quad \text{mit } j = k - 1 \\ &= A e^{At} \end{aligned}$$

Der Ausgangspunkt ist das homogene lineare DGL-System mit konstanten Koeffizienten

$$\vec{y}' = A\vec{y}(x), \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und der Anfangsbedingung

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0.$$

Mithilfe des Ansatzes

$$\vec{y}(x) = e^{Ax} \vec{y}_0$$

erhält man mit der Gleichung (1.29)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (e^{Ax}) &= A \left(\mathbb{E} + Ax + \frac{1}{2!} A^2 x^2 + \dots \right) \\ &= A e^{Ax} = e^{Ax} A. \end{aligned}$$

Beachte hierbei,

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

gilt nur, solange

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

1.4 Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung

gilt. Setzt man diese Gleichung nun in den Ansatz ein, ergibt sich:

$$\vec{y}(x) = e^{A(x-x_0)} \vec{y}_0,$$

was die allgemeine Lösung mit dem Hauptsystem

$$Y(x) = e^{A(x-x_0)}$$

ist. Für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung gilt

$$\vec{y}(x) = e^{A(x-x_0)} \vec{y}_0 + e^{Ax} \int_{x_0}^x e^{-At} \vec{b}(t) dt. \quad (1.30)$$

Ziel ist es, die Gleichung (1.30) zu vereinfachen. Falls A normal ist, d.h. $[A, A^\dagger] = AA^\dagger - A^\dagger A = 0$ falls $A = A^\dagger$, so ist A mit einer unitären Transformation diagonalisierbar. Die lineare Transformation führe man mit C , einer "nicht-singuläre" Matrix,

$$\vec{y}(x) = C\vec{z}(x), \quad \vec{z}(x) = C^{-1}\vec{y}(x)$$

mit der Anfangsbedingung $\vec{z}(x_0) = \vec{z}_0$ aus.

Setzt man dies in die DGL ein, erhält man

$$C^{-1}\vec{y}'(x) = C^{-1}ACC^{-1}\vec{y}(x) + C^{-1}\vec{b}(x)$$

und durch die Transformation ergibt sich

$$\vec{z}'(x) = \underbrace{C^{-1}AC}_{\equiv \tilde{A}(x)} \vec{z}(x) + \underbrace{C^{-1}\vec{b}(x)}_{\equiv \tilde{\beta}(x)} \quad (1.31)$$

Homogener Fall: $\tilde{\beta}(x) = 0$

Ist A normal, dann besitzt diese Matrix n linear unabhängige Eigenvektoren $(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n) = C$. Diese Eigenvektoren spannen den gesamten Raum auf. Ebenfalls sei A symmetrisch und reell, da wir reelle DGL besprechen werden. Für das Eigenwert-Problem gilt somit:

$$A\vec{c}_i = \lambda_i \vec{c}_i$$

So ist

$$\begin{aligned} AC &= (A\vec{c}_1, \dots, A\vec{c}_n) = (\lambda_1 \vec{c}_1, \dots, \lambda_n \vec{c}_n) \\ &= CA_D, \end{aligned}$$

wobei

$$A_D = C^{-1}AC = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Das Hauptsystem in z -Basis lautet dann

$$Z(x) = e^{A_D(x-x_0)} = \text{diag}\left(e^{\lambda_1(x-x_0)}, \dots, e^{\lambda_n(x-x_0)}\right)$$

und in y -Basis

$$Y(x) = CZ = \left(\vec{c}_1 e^{\lambda_1(x-x_0)}, \dots, \vec{c}_n e^{\lambda_n(x-x_0)}\right).$$

1 Differentialgleichungen

Bemerkung: $Z(x_0) = \mathbb{E}$, aber $Y(x_0)$ muss nicht unbedingt \mathbb{E} sein.

Beispiel:

1) Gegeben sei

$$\vec{y}'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}_{A=A^T} \vec{y}(x)$$

Somit ist A normal. Für die Eigenwerte gilt

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -3 \\ -3 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 + \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 + 2\lambda - 8 \stackrel{!}{=} 0$$

Man erhält $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$. Für die Eigenvektoren erhält man

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\vec{y}(x) = e^{2(x-x_i)} a \vec{e}_1 + e^{-4(x-x_i)} b \vec{e}_2$$

mit $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ folgt

$$e^{2x_0} a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-4x_0} b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \end{pmatrix}.$$

Somit erhält man für die Faktoren a, b

$$a = \frac{1}{2}(y_{0,1} - y_{0,2}), \quad b = \frac{1}{2}(y_{0,1} + y_{0,2}).$$

2) Gegeben sei

$$\vec{y}'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A \neq A^T} \vec{y}(x)$$

somit ist die Matrix nicht normal. Mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$. Für die Eigenwerte gilt

$$\det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + \lambda(\lambda - 1)^2.$$

Für $\lambda = 1$ gilt $\vec{v}_r = \vec{y}_0$ mit

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= e^x \sum_{j=0}^1 (A - \lambda \mathbb{1})^j \frac{x^j}{j!} \vec{y}_0 \\ &= e^x \vec{y}_0 + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}_0 x e^x \end{aligned}$$

1.4.8 Autonome Systeme, Klassifikation singulärer Punkte, Stabilität

Definition: Ein System von DGL heißt autonom, falls die Gleichungen nur von den gesuchten Funktionen

$$\vec{y}' = \vec{A}(\mathbf{y}). \quad (1.32)$$

Im Folgenden wird die grundlegende Idee anhand eines Systems von 2 DGL 1. Ordnung ausgedehnt von

$$\dot{x}(t) = F(x(t), y(t)) \quad (1.33)$$

$$\dot{y}(t) = G(x(t), y(t)) \quad (1.34)$$

wobei anzunehmen sein, dass $F(x, y)$ und $G(x, y)$ stetige Ableitungen nach x und y besitzen. Damit ist auch garantiert, dass die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist und eine eindeutige Lösung für das Anfangswertproblem $x(t_0) = x_0$ und $y(t_0) = y_0$ existiert. Die Lösung dieses Systems lässt sich als Parameterdarstellung einer Funktion $y(x)$ auffassen, die die DGL

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \quad \text{mit } y(x_0) = y_0 \quad (1.35)$$

erfüllt.

Trägt man in der x - y -Ebene alle Trajektorien des Systems in Gl. (1.33) und (1.34) auf, so erhält man das sogenannte Phasenporträt des Systems. Falls für x_0 und y_0

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0 \quad (1.36)$$

gilt, schrumpft die Trajektorie zu einem Punkt zusammen. Dieser Punkt wird Gleichgewichtspunkt, kritischer Punkt bzw. singulärer Punkt genannt.

Durch eine Verschiebung in der x - y -Ebene kann solch ein Punkt immerhin in den Nullpunkt verschoben werden.

Beispiel:

- gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{mit } \omega > 0 \quad (1.37)$$

Das entsprechende System der DGL 1. Ordnung lautet

$$\dot{x} = v, \quad (1.38)$$

$$\dot{v} = -\omega^2 x, \quad (1.39)$$

welches einen Gleichgewichtspunkt bei $(x, v) = (0, 0)$ hat. Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.40)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.41)$$

1 Differentialgleichungen

Als Trajektorien erhält man im Fall $A = 0$ den Gleichgewichtspunkt und für $A \neq 0$ die Ellipsen

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1. \quad (1.42)$$

Der Gleichgewichtspunkt ist offensichtlich in dem Sinne stabil, dass eine Lösung, die sich in der Nähe des Gleichgewichtspunktes befindet, sich nicht beliebig weit davon entfernen kann. D.h. es gibt einen Kreis um $(0, 0)$, der die Trajektorie vollständig für alle Zeiten enthält.

- harmonischer Oszillator mit Dämpfung

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{mit } \omega, \rho > 0 \quad (1.43)$$

Das entsprechende System der DGL 1. Ordnung lautet

$$\dot{x} = v, \quad (1.44)$$

$$\dot{v} = -2\rho v - \omega^2 x, \quad (1.45)$$

welches wieder einen Gleichgewichtspunkt bei $(x, v) = (0, 0)$ hat. Man betrachte nun die beiden wesentlich verschiedenen Fälle

- $\rho > \omega$ (starke Dämpfung). Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{mit } \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}, \quad (1.46)$$

$$v(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (1.47)$$

Für $C_1 = C_2 = 0$ erhält man den Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$. Im Falle $C_2 = 0, C_1 \neq 0$ erhält man die Halbgeraden $v = \lambda_1 x, x \leq 0$, im Falle $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ die Halbgeraden $v = \lambda_2 x, x \leq 0$ und im Falle $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ Kurven, die wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), v(t)) = (0, 0)$ dem Gleichgewichtspunkt beliebig nahe kommen und zwar so, dass

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = \frac{C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda_1.$$

- $\rho < \omega$ (schwache Dämpfung). Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = A e^{-\rho t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{mit } \beta = \sqrt{\omega^2 - \rho^2}, \quad (1.48)$$

$$v(z) = A \sqrt{\omega^2 + \rho^2} A e^{-\rho t} \cos(\omega t + \varphi_0 \alpha). \quad (1.49)$$

Für $t \rightarrow \infty$ strebt zwar $(x(t), v(t))$ wieder gegen den Gleichgewichtspunkt, edoch kann sich die Steigung $\frac{dv}{dx}$ wegen der Periodizität keiner Grenzlage nähern. Die Trajektorien kommen der Grenzlage zwar beliebig nahe, münden aber nicht in diesen ein. Es ergibt sich eine spiralförmige Bewegung.

1.4 Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung

In beiden Fällen ist die Gleichgewichtslage im oben erklärten Sinne stabil.

- Symbiose

$$\dot{x} = \alpha y \quad (1.50)$$

$$\dot{y} = \alpha x \quad (1.51)$$

mit $\alpha, \beta > 0$. Die allgemeine Lösung ergibt sich zu

$$x(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} \quad \text{mit } k = -\sqrt{\alpha\beta}, \quad (1.52)$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} (C_1 e^{kt} - C_2 e^{-kt}). \quad (1.53)$$

Für $C_1 = C_2 = 0$ erhält man den Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$, für $C_2 = 0, C_1 \neq 0$ die Halbgerade $y = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x, x \geq 0$, auf der man sich vom Nullpunkt entfernt.

Im Falle $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ die Halbgerade $y = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x, x \geq 0$, auf der man sich dem Nullpunkt nähert. In allen anderen Fällen ergeben sich Hyperbeln.

Mindestens eine Trajektorie (tatsächlich sind es unendlich viele) strebt vom Gleichgewichtspunkt weg, d.h. dieser ist nicht stabil.

Diese Beispiele geben Anlass zu folgender Definition:

Definition:

- (i) Der Gleichgewichtspunkt (x_0, y_0) , oder in anderen Worten die stationäre Lösung $x(t) = x_0$ und $y(t) = y_0$, des autonomen Systems

$$\dot{x} = F(x, y), \quad (1.54)$$

$$\dot{y} = G(x, y) \quad (1.55)$$

heißt stabil, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft:

Gilt für eine Lösung $x(t), y(t)$ dieses Systems für einen Zeitpunkt t_1 die Ungleichung

$$[x(t_1) - x_0]^2 + [y(t_1) - y_0]^2 < \delta^2, \quad (1.56)$$

so ist

$$[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 < \epsilon^2 \quad \text{für alle } t \geq t_1. \quad (1.57)$$

- (ii) Der Gleichgewichtspunkt (x_0, y_0) wird asymptotisch stabil genannt, wenn er stabil ist und zudem ein $R > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert:

Gilt für eine Lösung $x(t), y(t)$ dieses Systems für einen Zeitpunkt t_1 die Ungleichung

$$[x(t_1) - x_0]^2 + [y(t_1) - y_0]^2 < R^2, \quad (1.58)$$

so ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0). \quad (1.59)$$

1 Differentialgleichungen

(iii) Der Gleichgewichtspunkt heißt instabil, wenn er nicht stabil ist.

In den obigen Beispielen ist der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$ im Falle des ungedämpften harmonischen Oszillators stabil (aber nicht asymptotisch stabil), im Beispiel des gedämpften harmonischen Oszillators asymptotisch stabil und der Fall der Symbiose ist instabil.

Idee für die folgenden Überlegungen: Nach der Verschiebung betrachten wir in einer (hinreichend kleinen) Umgebung eines solchen Punktes des linearisierte System

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0, y=0} x + \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right|_{x=0, y=0} y = ax + by, \quad (1.60)$$

$$\dot{y} = \left. \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0, y=0} x + \left. \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \right|_{x=0, y=0} y = cx + dy, \quad (1.61)$$

d.h. wir betrachten die Taylorentwicklung in der ersten Ordnung. Die Lösung dieses Systems erhalten wir über die Eigenwerte der Matrix:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \quad (1.62)$$

Man muss nun folgende Fälle unterscheiden:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Hier gibt es zwei Unterfälle

(a) $\lambda_i < 0$: Der Gleichgewichtspunkt ist asymptotisch stabil, Bsp:

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -2y$$

(b) $\lambda_i > 0$: Der Gleichgewichtspunkt ist instabil, Bsp:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y$$

Man erhält einen stabilen bzw. instabilen Knotenpunkt.

1.4 Gewöhnliche DGL n -ter Ordnung & Systeme von n gewöhnlichen DGL 1. Ordnung

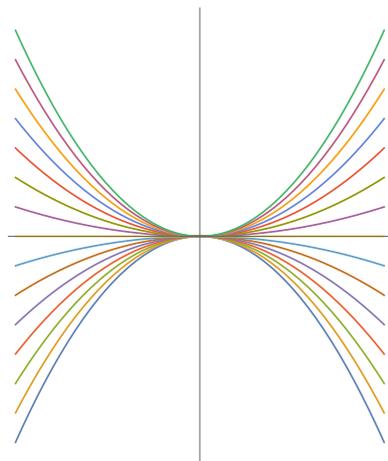


Abbildung 1.1: zweitangentiger Knoten

2. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Es ergibt einen instabilen Gleichgewichtspunkt, einen Sattelpunkt. Bsp:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 4x \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

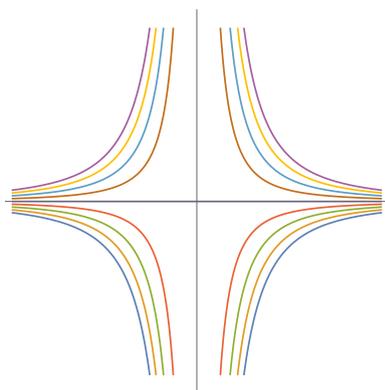


Abbildung 1.2: Sattelpunkt

3. $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$: Auch hier sind zwei wesentliche Fälle zu unterscheiden:

- (a) $\lambda < 0$: Der Gleichgewichtspunkt ist asymptotisch stabil, Bsp:

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y \Rightarrow \lambda = -1$$

Dies ergibt einen Sternpunkt.

Bsp:

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -x - y \Rightarrow \lambda = -1$$

1 Differentialgleichungen

(nicht diagonalisierbare Matrix A (Jordansche Normalform)). Lösungen:
 $y = x \ln|cx|$ mit $x \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

- (b) $\lambda > 0$: Der Gleichgewichtspunkt ist instabil, Bsp: wie oben aber mit umgekehrten Koeffizienten in Matrix A , umkehr der Pfeilrichtungen.

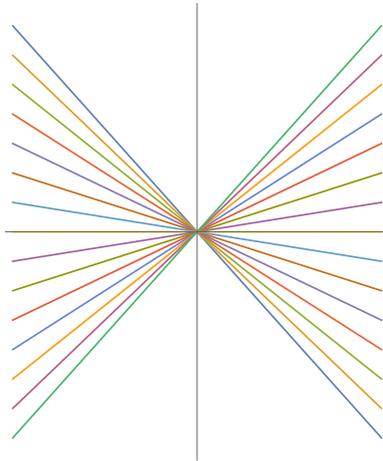


Abbildung 1.3: Stern

4. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \neq 0$. Wieder mit zwei wesentlichen Fällen:

- (a) $\alpha < 0$: Der Gleichgewichtspunkt ist asymptotisch stabil, Bsp:

$$\dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = x - y \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

Man erhält einen Strudelpunkt.

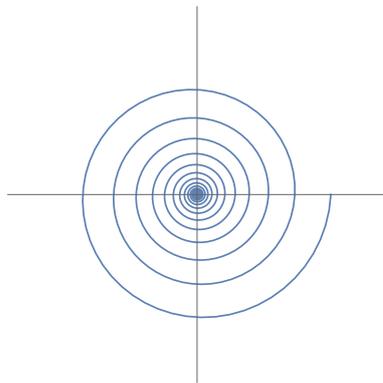


Abbildung 1.4: Strudelpunkt

- (b) $\alpha > 0$: Der Gleichgewichtspunkt ist instabil

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm i$$

1.5 Kurze Anmerkung zu Randbedingungen

Es ergibt sich wieder eine Spirale, aber mit umgekehrter Richtung.

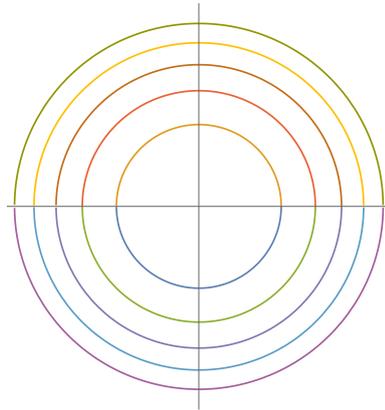


Abbildung 1.5: Wirbelpunkt

5. $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ mit $\beta \in \mathbb{R}$: $(0,0)$ stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Bsp: ungedämpfter Oszillator.

1.5 Kurze Anmerkung zu Randbedingungen

Bei DGL höherer Ordnung ist nicht immer eine Anfangsbedingung, sondern unter Umständen eine Randbedingung gegeben, z.B. wird im Rahmen der schwingenden Saite auf die DGL

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y(l) = 0 \quad (1.63)$$

geführt. Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) \quad (1.64)$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $A = 0$. Die zweite Bedingung erfordert

$$y(l) = 0 = B \sin(\omega l). \quad (1.65)$$

Die eine uninteressante Möglichkeit ist die triviale Lösung mit $B = 0$. Die zweite Möglichkeit führt auf die sogenannten Eigenschwingungen, d.h. der Parameter ω erfüllt die Bedingung

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (1.66)$$

Man kann dies als Eigenwertproblem des Operators d^2/dx^2 im Raum der Funktionen $C^2[0, l]$ auffassen und erhält als Eigenwerte ω_n mit den Eigenfunktionen $\sin(\omega_n x)$.

1.6 Zusammenfassung

- DGL n-ter Ordnung \Leftrightarrow System von n DGL 1. Ordnung
- Allgemeine Lösung einer DGL n-ter Ordnung enthält n unbestimmte Konstanten C_i , die über die Anfangsbedingungen $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{n-1}(x_0)$ fixiert werden.
- Fixpunktsätze (Banach, Weissinger): wichtiges Werkzeug, insbesondere in der Behandlung von nicht-linearen Problemen
- Existenz und Eindeigkeitssätze für das System

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad \text{mit} \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \quad (1.67)$$

- Picard / Lindelöf: $f(x, \vec{y})$ ist in x stetig und erfüllt in bezug auf \vec{y} eine Lipschitz-Bedingung \Rightarrow es gibt eine eindeutige Lösung in der Umgebung von (x_0, \vec{y}_0)
- Peano: $f(x, \vec{y})$ ist in x und \vec{y} stetig, erfüllt aber keine Lipschitz-Bedingung \Rightarrow es gibt mindestens eine Lösung in der Umgebung von (x_0, \vec{y}_0)

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad \text{mit} \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt \quad (1.68)$$

\Rightarrow Picard-Iteration (konvergiert gleichmäßig gegen die Lösung, falls Voraussetzung von Picard / Lindelöf erfüllt sind):

$$\vec{y}_{n+1}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(t, \vec{y}_n(t)) dt. \quad (1.69)$$

2 Partielle Differentialgleichungen

2.1 Definitionen und Beispiele

Definition: Eine Gleichung zwischen einer unbekanntem Funktion $u(x_i)$ mit $x_i \in I_i \subset \mathbb{R}$ und ihren partiellen Ableitungen

$$F \left(x_i, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_k}} \right) = 0$$

($i, i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$) heißt PARTIELLE DGL k -TER ORDNUNG. Im Fall von zwei Variablen x, y stellt jede Lösung über I eine Fläche dar welche man LÖSUNGSFLÄCHE oder INTEGRALFÄCHE nennt.

Beispiel:

- (a) Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho(\vec{x}, t) + \nabla \vec{j}(x, t) = 0$$

ist eine partielle lineare DGL 1. Ordnung.

- (b) Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

ist eine partielle lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung

Definition: Mehrere Gleichungen für mehrere Funktionen $u_\sigma(x_i)$ ($\sigma = 1, \dots, s$) mit $x_i \in I_i \subset \mathbb{R}$ und ihre partiellen Ableitungen

$$F_\rho \left(x_i, u_\sigma, \frac{\partial u_\sigma}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^k u_\sigma}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right) = 0$$

wobei $i, i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\rho = 1, \dots, r$, beschreiben ein System von **partiellen DGL**.

Beispiel: Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2.2 Die lineare partielle DGL 1. Ordnung

Definition: Falls man die lineare partielle DGL 1. Ordnung nur in der Form $F(x_i, u, p_i) = 0$ schreiben kann, steht sie in ihrer IMPLIZITEN FORM da. Ist die DGL jedoch nach ihrer höchsten Ableitung auflösbar, ist dies die EXPLIZITE FORM, mit $p_i := \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Definition: Eine partielle DGL 1. Ordnung heißt QUASILINEAR, wenn sie in den p_i linear ist, also die Variablen von (x_j, u) abhängen

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_j, u)p_i = r(x_j, u).$$

Sie heißt LINEAR, wenn sie auch in u linear ist, das heißt a_i nur noch von x_j abhängt $\forall i$ und r in u linear ist

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_j)p_i + b(x_j)u = r(x_j)$$

2.2.1 Lösung der linearen partiellen DGL 1. Ordnung

Zunächst beschränken wir uns auf die lineare partielle DGL, welche u nicht enthält.

$$\sum_{i=1}^n a_i(\vec{x})p_i = r(\vec{x}), \quad \text{mit } p_i := \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

(A) Homogener Fall

$$\sum_{i=1}^n a_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{2.1}$$

Anwenden der CHARAKTERISTIKENMETHODE

– Zuordnung des gewöhnlichen DGL-Systems zu (2.1)

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(\vec{x}), \dots, \frac{dx_n}{dt} = a_n(\vec{x}).$$

Die Lösungsfunktionen $x_1(t), \dots, x_n(t)$ heißen CHARAKTERISTIKEN.

– Bestimme nun $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

2.2 Die lineare partielle DGL 1. Ordnung

- Bilde geeignete Verknüpfungen der Lösungsfunktionen, so dass die Abhängigkeit von der Variable t eliminiert wird

$$\begin{aligned} g_k(\vec{x}) &= \text{konstant in } t \\ \frac{d}{dt}g_k(\vec{x}) &= 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Damit ist $u(\vec{x}) = g_k(\vec{x})$ eine Lösung von (2.1), weil sie längs der Charakteristiken konstant ist.

- Aus den $(n - 1)$ linear unabhängigen Funktionen $g_k(\vec{x})$ ergibt sich die allgemeine Lösung der linear homogenen DGL (Φ beliebig, aber nach g_i differenzierbar)

$$u(\vec{x}) = \Phi(g_1(\vec{x}), \dots, g_{n-1}(\vec{x})).$$

Beweis:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial g_j} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial g_j} \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i}}_{=0}$$

Beispiel: Gegeben ist die linear-homogene DGL

$$u_x(x, y) + a u_y(x, y) = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Das charakteristische System dazu lautet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= a \end{aligned} \right\} x(t) = t + C_1, \quad y(t) = at + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Einsetzen in (2.2) und $x(t)$ mit a multiplizieren ergibt

$$a \cdot x(t) - y(t) = a \cdot C_1 - C_2 = \text{konstant.}$$

Somit ist die Abhängigkeit von t eliminiert und $u(x, y) = ax - y$ ist eine Lösung der linear-homogenen DGL (2.2) und ihre allgemeine Lösung lautet:

$$u(x, y) = F(ax - y)$$

wobei $F(s)$ eine frei wählbare stetig differenzierbare Funktion einer Variablen s darstellt und $s = ax - y$ zu setzen ist.

2 Partielle Differentialgleichungen

(B) Inhomogener Fall

$$\sum_{i=1}^n a_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = r(\vec{x}) \quad (2.3)$$

$V(u, \vec{x})$ sei eine Funktion, die genau dann verschwindet, wenn u die Lösung der Gleichung $V(u, \vec{x}) = 0$ ist. Daraus folgt

$$0 = dV(u, \vec{x}) = \frac{\partial V}{\partial u} du + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i,$$

somit gilt für $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ nun durch umformen

$$p_i = - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial u}}. \quad (2.4)$$

Nach Einsetzen von (2.4) in (2.3) ergibt sich die Formel

$$- \sum_{i=1}^n a_i(\vec{x}) \frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial u}} = r(\vec{x}).$$

Umformen ergibt nun die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + r \frac{\partial V}{\partial u} = 0. \quad (2.5)$$

Dies ist eine homogene lineare DGL für $(n+1)$ Variablen. Mithilfe der Charakteristikenmethode lässt sich nun die Lösung $V(u, \vec{x})$ von Gleichung (2.5) bestimmen:

$$V = \Phi(g_1(u, \vec{x}), \dots, g_n(u, \vec{x})).$$

Aus $V(u, \vec{x}) = 0$ erhält man dann das gesuchte u .

(C) Die quasilineare homogene Gleichung mit $u(\vec{x})$

Eine quasilineare partielle DGL 1. Ordnung für eine gesuchte Funktion $u(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, hat die Form

$$\sum_i a_i(u, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} u(\vec{x}) = r(u, \vec{x}). \quad (2.6)$$

Man macht nun, wie im Fall der inhomogenen Gleichung, siehe Punkt (B) oben, den Ansatz für eine implizite Darstellung der Lösung

$$V(u, \vec{x}) = 0. \quad (2.7)$$

Die analoge Rechnung, wie oben ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial u}} \quad (2.8)$$

und damit erhält man folgende lineare DGL 1. Ordnung:

$$r(u, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial u} V(u, \vec{x}) + \sum_i a_i(u, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} V(u, \vec{x}) = 0 \quad (2.9)$$

Beispiel:

Kontinuitätsgleichung

$\rho(\vec{x}, t)$: Dichte einer strömenden Flüssigkeit

$\vec{v}(\vec{x}, t)$: Strömungsgeschwindigkeit

$\vec{j} = \rho \vec{v}$: Stromdichte

Dann gilt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

Das heißt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x}, t)$ sei vorgegeben. Die charakteristischen Kurven $\vec{x}_i(t)$ werden hier als CHARAKTERISTISCHE STRÖMUNGSLINIEN $\vec{z}(t)$ bezeichnet. Das charakteristische System liefert die Anfangsbedingungen

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{v}_i(\vec{z}(t), t), \quad \vec{z}(0) = \vec{x}_0,$$

was die Lösung $\rho(\vec{x}(t), t)$ impliziert

$$\rho(\vec{x}(t), t) = \rho(\vec{z}(0), 0) \exp \left[- \int_0^t \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{z}(\tau), \tau) d\tau \right].$$

2.2.2 Existenzsatz, Randbedingungen

Satz: ¹ Es sei $G_0 \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der x-y-Ebene, G das Gebiet im x-y-u-Raum ($\subset \mathbb{R}^3$), welches durch Hinzunahme von u mit der Bedingung $|u| < u_{max}$ entsteht. Es seien weiter $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$ und $c(x, y, u)$

¹Siehe dazu z.B. R. Courant, D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik II, Kapitel II.1.

2 Partielle Differentialgleichungen

in G stetig differenzierbare Funktionen in x, y und u . Es seien $x(s)$, $y(s)$ und $u(s)$ stetig differenzierbare Funktionen von s für $|s| < S = s_{max}$ mit

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \neq 0,$$

welche eine Kurve in G mit doppeltpunktfreier Projektion C_0 in G_0 definieren. Auf der Kurve C sei überall

$$\delta = a(x, y, u) \frac{dy}{ds} - b(x, y, u) \frac{dx}{ds} \neq 0.$$

Dann gibt es ein Teilgebiet $D_0 \in G_0$, das C_0 enthält und eine stetig differenzierbare Funktion $u(x, y): D_0 \rightarrow (-u_{max}, u_{max})$, welche dort der Differentialgleichung

$$a(x, y, u)u_x(x, y) + b(x, y, u)u_y(x, y) = c(x, y, u) \quad (2.10)$$

und auf C_0 der Anfangsbedingung

$$u(x(s), y(s)) = u(s) \quad (2.11)$$

genügt. Die Lösung $u(x, y)$ ist eindeutig bestimmt.

Bemerkung:

- Doppelpunktfreie Projektion C_0 bedeutet, dass die Projektion der Kurve C in die x - y -Ebene keine Überschneidungen enthält. Falls solche Überschneidungen existieren, existieren immer noch Lösungen, doch sind diese im Allgemeinen nicht mehr eindeutig und enthalten auch Flächen, die sich selbst durchdringen.
- Die Bedingung

$$\Delta = a(x, y, u) \frac{dy}{ds} - b(x, y, u) \frac{dx}{ds} \neq 0$$

impliziert, dass die vorgegebene Kurve keine Charakteristik sein darf. Falls $\Delta = 0$, dann existieren unendlich viele Lösungen des Anfangswertproblems. Beachte, dass auch $\Delta = 0$ gegeben sein kann, obwohl die vorgegebene Kurve keine Charakteristik ist.

- Im Fall, dass u nicht von zwei, sondern von n Variablen abhängt, muss nicht eine Kurve, sondern eine $n-1$ -dimensionale Fläche vorgegeben werden, um eine eindeutige Lösung erhalten zu können.

Beispiel:

1. Es ist das Anfangswertproblem

$$xu_x + yu_y = 0$$

2.2 Die lineare partielle DGL 1. Ordnung

gegeben mit der Anfangskurve

$$x(s) = s, \quad y(s) = 1, \quad u(s) = s^2.$$

Lösung: Vorab sei angemerkt, dass eine äquivalente Form der Anfangsbedingung durch

$$u(s, 1) = s^2$$

gegeben ist. Die charakteristischen Gleichungen lauten:

$$\frac{dx}{dt} = x \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = y.$$

Diese haben die Lösung

$$x(t) = x_0 e^t \quad \text{und} \quad y(t) = y_0 e^t \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{y_0}{x_0} x = cx.$$

Damit ergibt sich für die allgemeine Lösung

$$u(x, y) = \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Die Anfangsbedingung ergibt nun durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} u(s, 1) &= \Phi\left(\frac{1}{s}\right) \stackrel{!}{=} s^2 \\ \Rightarrow \Phi(s) &= s^{-2} \end{aligned}$$

und damit die Lösung

$$u(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

Falls man nicht an der allgemeinen Lösung interessiert ist, sondern an der, die die Anfangsbedingung erfüllt, könnte man alternativ den folgenden Weg einschlagen. Dieser beruht auf der Idee, dass jeder Punkt auf der Anfangskurve einen Startpunkt (x_0, y_0) für die Charakteristiken vorgibt. Man ersetzt also in den Lösungen für die Charakteristiken die Werte (x_0, y_0) durch $x(s)$ und $y(s)$ und erhält

$$\begin{aligned} x(t, s) &= x_0(s) e^t = s e^t, \\ y(t, s) &= y_0(s) e^t = e^t. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen wird nun s als Funktion von x und y berechnet und man erhält

$$s = \frac{x}{y}.$$

Eingesetzt in die Anfangsbedingung für u erhält man wieder

$$u(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

2 Partielle Differentialgleichungen

2. Man betrachte nun die DGL

$$uu_x + u_y = 1$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(s) = s^2, \quad y(s) = 2s, \quad u(s) = s.$$

Es liegt also eine quasilineare DGL vor, für die $V(x, y, u) = 0$ zu betrachten ist. Dies führt auf die DGL

$$uV_x + V_y + V_u = 0$$

und damit auf drei Charakteristiken:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= u \\ \frac{dy}{dt} &= 1 \\ \frac{du}{dt} &= 1\end{aligned}$$

Die Lösung ist durch

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \frac{t^2}{2} + u_0 t, \\ y(t) &= y_0 + t, \\ u(t) &= u_0 + t\end{aligned}$$

gegeben. Die allgemeine Lösung ist durch (man setze z.B. willkürlich $y_0 = 0$)

$$\begin{aligned}u &= t, \\ u_0 &= u - y = g_1(x, y, u), \\ x_0 &= x - \frac{y^2}{2} - y(u - y) = g_2(x, y, u) \\ \Rightarrow \quad V(x, y, u) &= \Phi \left(u - y, x - \frac{y^2}{2} - y(u - y) \right) = 0.\end{aligned}$$

Für die Einarbeitung der Anfangsbedingung ist in diesem Fall der zweite oben angedeutete Weg einfacher, d.h. wir setzen x_0 , y_0 und u_0 in den Charakteristiken durch die entsprechenden Ausdrücke für die Anfangskurve und erhalten:

$$\begin{aligned}x(s, t) &= s^2 + \frac{t^2}{2} + st \\ y(s, t) &= 2s + t \\ u(s, t) &= s + t\end{aligned}$$

2.3 Das vollständige, allgemeine, singuläre Integral

Man kann jetzt aus den beiden ersten Gleichungen s und t durch x und y ausdrücken und erhält

$$u(x, y) = \frac{y}{2} \pm \sqrt{x - \frac{y^2}{4}}.$$

Man beachte, dass

- (i) die Lösung nur dann reell bleibt, falls $x > \frac{y^2}{4}$
- (ii) entlang der Anfangskurve sind die Ableitungen u_x und u_y nicht definiert.

Der tiefere Grund ist, dass entlang der Kurve die Determinante

$$\Delta = a(x, y, u) \frac{dy}{ds} - b(x, y, u) \frac{dx}{ds} = u(s) \frac{dy}{ds} - 1 \cdot \frac{dx}{ds} = s \cdot 2 - 2s = 0$$

verschwindet, obwohl die Kurve C keine Charakteristik ist. Dies ist auch die Ursache für die Doppeldeutigkeit der Lösung.

2.3 Das vollständige, allgemeine, singuläre Integral

2.3.1 Konstruktion von Lösungen durch Einhüllende

Definition: Ein vollständiges Integral ist eine Lösung $u = \phi(x_i, c_i)$ der (auch nichtlinearen) partiellen DGL $F(x_i, u, p_i) = 0$, die von n Integrationskonstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ abhängt.

Bemerkung: Das vollständige Integral stellt im allgemeinen nicht die Lösungsgesamtheit dar. Wir versuchen aus dem vollständigen Integral weitere Lösungen zu finden, in dem wir die Konstanten als Funktion auffassen (Variation der Konstanten) $c_i = c_i(\vec{x})$ und differenzieren:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial x_i}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Aus $\frac{\partial u}{\partial x_i} \stackrel{!}{=} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ folgt die Bedingung

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} = 0. \quad (2.12)$$

Wann ist Gleichung (2.12) erfüllt?

1. Ist $c_j(\vec{x}) = \text{konst.}$ folgt daraus das vollständige Integral.

2 Partielle Differentialgleichungen

2. Mit $\frac{\partial \phi}{\partial c_j} = 0$ (für $j = 1, \dots, n$) ergibt sich eine neue Lösung. Falls $F = 0$, gilt auch $\frac{dF}{dc_i} = 0$ mit

$$\frac{\partial F}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial c_i}}_{=0=\frac{d\phi}{dc_i}} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial F}{\partial p_j}}_{p_j=\frac{\partial \phi}{\partial x_j}} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial c_i} \right)}_{=\frac{d}{dc_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)} = 0 \quad (2.13)$$

Gleichung (2.13) ist beispielsweise lösbar, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = \dots = \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0.$$

Definition: Ein Integral heißt SINGULÄR, wenn auf der Lösungsfläche die Gleichung

$$F(x_i, u, p_i) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

erfüllt ist. F wird auch als ENVELOPPE oder EINHÜLENDE bezeichnet. Das heißt die Enveloppe/Einhüllende berührt jede Kurvenschar nur einmal.

Bemerkung: Gleichung (2.12) kann auch nicht-trivial erfüllt sein, dann müssen wir die DGL $F(x_i, u, p_i) = 0$ allgemein lösen. Das Konzept der Einhüllenden ist nicht anwendbar.

2.3.2 Anwendung auf Hamilton-Jacobi-Theorie

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG) lautet

$$\frac{\partial S}{\partial s} + H(t, x_i, p_i) = 0 \quad (2.14)$$

mit $p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$.

Satz: Ein vollständiges Integral der HJG sei bekannt.

$$S(x_i, t) = \phi(x_i, t, a_i) + a_0$$

mit $i = 1, \dots, n$. Dann erhält man aus

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = p_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial a_i} = b_i \quad (2.15)$$

(wobei die b_i beliebige Konstanten darstellen) die allgemeine Lösung der KANONISCHEN BEWEGUNGSGLEICHUNG

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Beweis:

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_i} \underbrace{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + H \left(t, x_i, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \right)}_{=0} \stackrel{(2.15)}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial a_i} \quad (2.16)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial \phi}{\partial a_i} - b_i \right)}_{=0} \stackrel{(2.15)}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_i \partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \quad (2.17)$$

(2.16) - (2.17) ergibt

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial a_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{dx_j}{dt} \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Dieses System ist nur lösbar für

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{dx_j}{dt}, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

(alle $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial a_i}$ werden i.a. linear unabhängig sein). Außerdem gilt:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + H \left(t, x_i, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \right)}_{=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \quad (2.19)$$

$$\frac{dp_i}{dt} \stackrel{p_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (2.20)$$

(2.20) - (2.19) ergibt

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (2.21)$$

Beispiel: Ein freies Teilchen mit der Hamilton-Funktion $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ und $p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$ Die Hamilton-Jacobi Gleichung ergibt somit

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = 0.$$

Mithilfe des Ansatzes

$$S = W(\vec{x}) - Et + S_0$$

2 Partielle Differentialgleichungen

erhält man nun

$$E - \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] = 0. \quad (2.22)$$

Mit $\vec{p}_0 \equiv \vec{p}(t=0)$ und $W(\vec{x}) = \vec{p}_0 \cdot \vec{x}$ ergibt sich

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = p_{0,i}.$$

Gleichung (2.22) lässt sich nun schreiben als

$$E = \frac{\vec{p}_0^2}{2m},$$

womit sich für $S(\vec{x}, t)$

$$S(\vec{x}, t) = -\frac{\vec{p}_0^2}{2m}t + \vec{p}_0 \cdot \vec{x} + S_0$$

die partielle Ableitung

$$\frac{\partial S}{\partial p_{0,i}} = -\frac{p_{0,i}}{m}t + x_i =: x_{0,i}$$

ergibt. Man erhält die Bahnkurve

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \frac{\vec{p}_0}{m}t.$$

2.4 Lineare partielle DGL 2. Ordnung

In der mathematischen Physik spielt gerade diese Klasse von DGL eine wichtige Rolle. So sind etwa die Wellengleichung oder die Schrödinger-Gleichung lineare partielle DGL 2. Ordnung.

Notation:

Sei $u(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ die gesuchte Lösung einer partiellen DGL mit

$$u_i := \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{ik} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = u_{ki}, \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Definition: Eine partielle DGL 2. Ordnung heißt QUASILINEAR, wenn sie in den 2. Ableitungen u_{ik} linear ist

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(\vec{x})u_{ik} + F(\vec{x}, u, u_i) = 0.$$

Sie heißt LINEAR, wenn sie auch in den 1. Ableitungen und in u linear ist

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(\vec{x})u_{ik} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{x})u_i + c(\vec{x})u + d(\vec{x}) = 0. \quad (2.23)$$

Diese lineare partielle DGL 2. Ordnung ist HOMOGEN, wenn $d(\vec{x}) \equiv 0$, falls $d(\vec{x}) \neq 0$ liegt der INHOMOGENE Fall vor. Man spricht von LINEAREN PARTIELLEN DGL MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN, wenn die a_{ik} , b_i , c unabhängig von \vec{x} sind.

2.4.1 Klassifikation einer linearen partiellen DGL 2. Ordnung

Mit der Annahme, dass die reelle Matrix $A(\vec{x}) = (a_{ik}(\vec{x}))$ symmetrisch sei, betrachtet man für ein festes \vec{x} die quadratische Form in $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$Q(\vec{\xi}) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(\vec{x})\xi_i\xi_k.$$

Da die Matrix $A(\vec{x})$ symmetrisch ist, lässt sich $A(\vec{x})$ und damit auch Q diagonalisieren. Somit existiert ein U , so dass

$$U^{-1}AU = \Lambda$$

mit

$$\Lambda(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\vec{x}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$Q(\vec{\xi}) = \vec{\xi}^T A \vec{\xi} = \vec{\xi}^T \underbrace{UU^{-1}}_{=E} A \underbrace{UU^{-1}}_E \vec{\xi} = \vec{\eta}^T \Lambda \vec{\eta} = P(\vec{\eta})$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\eta} = U^{-1}\vec{\xi} \\ \vec{\eta}^T = \vec{\xi}^T U \end{array} \right\} \text{Da } A \text{ symmetrisch ist, ist } U^T = U^{-1} \text{ orthogonal.}$$

Somit ergibt sich für $P(\vec{\eta})$

$$P(\vec{\eta}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\vec{x})\eta_i^2, \quad \text{mit } \vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$$

Hierbei sind $\alpha_i(\vec{x})$ die Eigenwerte, $\vec{\eta}(\vec{x})$ die Eigenvektoren der Matrix $A(\vec{x})$.

Definition: Eine reelle symmetrische Matrix $A = (a_{ik})$ mit den Eigenwerten α_i heißt

- DEFINIT, wenn alle $\alpha_i > 0$ oder alle $\alpha_i < 0$,
- SEMIDEFINIT, wenn alle $\alpha_i \geq 0$ oder alle $\alpha_i \leq 0$,
- INDEFINIT, falls A nicht semidefinit ist, A weist dann mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert hat.

2 Partielle Differentialgleichungen

Definition: Die lineare partielle DGL 2. Ordnung

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(\vec{x})u_{ik} + \sum_{i=1}^n b_i(\vec{x})u_i + c(\vec{x})u + d(\vec{x}) = 0$$

mit der reellen symmetrischen Matrix $A(\vec{x}) = (a_{ik}(\vec{x}))$, welche die Eigenwerte $\alpha_i(\vec{x})$ ($i = 1, \dots, n$) besitzt, heißt im Punkt $\vec{x} \in D$

- ELLIPTISCH, falls $A(\vec{x})$ definit ist.
- PARABOLISCH, falls mindestens ein $\alpha_i(\vec{x}) = 0$ ist.
- HYPERBOLISCH, falls $n - 1$ Eigenwerte $\alpha_i(\vec{x})$ dasselbe Vorzeichen, wohingegen ein Eigenwert das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.
- ULTRAHYPERBOLISCH, falls $n - m$ Eigenwerte $\alpha_i(\vec{x})$ dasselbe Vorzeichen, die restlichen m Eigenwerte ($1 < m < n - 1$) das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen.

2.4.2 Beispiele aus der Physik

- Die
 - Laplace-Gleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$
 - Poisson-Gleichung $\Delta u - \rho = 0$
 - Helmholtz-Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$
 sind für alle \vec{x} ELLIPTISCHE DGL.

- Die
 - Wellengleichung $c^2 \Delta u(\vec{x}, t) - \frac{\partial^2 u(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = 0$ (c ist die Phasengeschwindigkeit)
 - Klein-Gordon-Gleichung $\Delta \varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \varphi(\vec{x}, t) = 0$
 sind für alle \vec{x} und t HYPERBOLISCH.

- Die
 - Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} T(\vec{x}, t) - \gamma \Delta T(\vec{x}, t) = 0$ (γ ist die Temperaturleitfähigkeit)
 - (zeitabhängige) Schrödinger-Gleichung $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}) \Psi(\vec{x}, t)$
 sind für alle \vec{x} und t PARABOLISCH.

Komplexeres mathematisches Beispiel

$$(x^2 - 1)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (y^2 - 1)u_{yy} = xu_x + yu_y \quad (2.24)$$

Die Matrix

$$A = A(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & xy \\ xy & y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = x^2 + y^2 - 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Somit ergibt sich die diagonalisierte Matrix

$$A_D = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Gleichung (2.24)

- ELLIPTISCH für $x^2 + y^2 < 1$,
- PARABOLISCH für $x^2 + y^2 = 1$,
- HYPERBOLISCH für $x^2 + y^2 > 1$.

2.5 Die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = j(x, t)$$

mit

c : Phasengeschwindigkeit

$j(x, t)$: äußere Anregung

2.5.1 Klassifikation der Anfangs- und Randbedingungen

Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = l$:

1. DIRICHLET-Randbedingungen

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

2. NEUMANN-Randbedingungen

$$u_x(0, t) = \nu_1(t), \quad u_x(l, t) = \nu_2(t)$$

3. CAUCHY-Randbedingungen (Kombination aus 1. und 2. Randbedingung)

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(l, t) = \nu_2(t)$$

Beispiel: eingespannte Saite $\mu_1 = \mu_2 = 0$

(A) Hier kann nur bei $x = 0$ eine Randbedingung gewählt werden.

$$\begin{array}{c} 0 \leq x < \infty \\ | \text{-----} \dots \end{array}$$

(B) Hier gibt es keine Ränder, also auch keine Randbedingungen.

$$\begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ \dots \text{-----} \dots \end{array}$$

Anfangsbedingungen für $t = 0$

$u(x, 0) = \phi(x)$ entspricht der Anfangsauslenkung. $u_t(x, 0) = \Phi(x)$ dementsprechend der Anfangsgeschwindigkeit.

2.5.2 Reduktion allgemeiner Randwertaufgaben

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t), \quad 0 < x < l$$

mit

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \phi(x), & u_t(x, 0) &= \Phi(x) \\ u(0, t) &= \mu_1(t), & u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned}$$

also mit zwei Anfangsbedingungen und zwei Randbedingungen. Die Lösung kann in eine Summe zerlegt werden

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t) + u^{(3)}(x, t) + u^{(4)}(x, t)$$

wobei $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ der homogenen Gleichung (mit $f(x, t) = 0$) genügen und $u^{(4)}$ der inhomogenen Gleichung. Für die Anfangsbedingung gilt

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x, 0) &= \phi(x), & u^{(i)}(x, 0) &= 0, \\ u_t^{(1)}(x, 0) &= \Phi(x), & u_t^{(i)}(x, 0) &= 0, \quad \text{für } i = 2, 3, 4 \end{aligned}$$

und für die Randbedingung

$$\begin{aligned} u^{(2)}(0, t) &= \mu_1(t), & u^{(3)}(0, t) &= 0, & u^{(i)}(0, t) &= 0, \\ u^{(2)}(l, t) &= 0, & u^{(3)}(l, t) &= \mu_2(t), & u^{(i)} &= 0, \quad \text{für } i = 1, 4. \end{aligned}$$

Die $u^{(i)}$ sind Lösungen für einfacherer Aufgaben als des ursprünglichen Problems.

2.5.3 Eindeutigkeitssatz

Satz: Die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t)$$

hat hinsichtlich der ersten, zweiten und dritten Randwertaufgabe höchstens eine Lösung.

Beweis: (für erste Randwertaufgabe) Es seien u_1 und u_2 Lösungen der ersten Randwertaufgabe. Mithilfe der Differenz

$$v \equiv u_1 - u_2$$

gilt

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$$

wie auch

$$v(x, 0) = u_1(x, 0) - u_2(x, 0)$$

und

$$v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0.$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Wird nun die "Energie" betrachtet

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (c^2 v_x^2 + v_t^2) dx$$

muss somit für die Zeitableitung folgendes gelten:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^l (c^2 v_x v_{xt} + v_t v_{tt}) dx \\ &= c^2 \underbrace{[v_x v_t]_0^l}_{=0} - \int_0^l c^2 v_{xx} v_t dx + \int_0^l v_t v_{tt} dx \\ &= \int_0^l v_t \underbrace{(v_{tt} - c^2 v_{xx})}_{=0} dx = 0 \\ \Rightarrow E(t) &= \text{konst.} = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l [c^2 v_x^2 + v_t^2]_{t=0} dx = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt Energieerhaltung.

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [c^2 v_x^2 + v_t^2] dx = 0 \quad (2.25)$$

Der Integrand ist stetig und positiv, weshalb dieser verschwindet. Da der Integrand von Gleichung (2.25) verschwinden muss, muss $v(x, t) = \text{konst.}$ gelten. Aus $v(0, t) = 0$ folgt dann $v \equiv 0$.

2.5.4 Die Methode von D'Alembert

(A) Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung

Die homogene Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ hat die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

Damit ergeben sich folgende Ableitungen

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 [f''(x + ct) + g''(x - ct)], \\ u_{xx} &= f''(x + ct) + g''(x - ct), \end{aligned}$$

wobei f und g beliebige 2-fach differenzierbare Funktionen sind. f beschreibt eine nach links laufende, g eine nach rechts laufende Welle. Die Wellenform selber bleibt erhalten.

(B) Lösung des Cauchy-Problems

Mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad (2.26)$$

$$u'(x, 0) = c(f'(x) - g'(x)) = \Phi(x) \quad (2.21b)$$

erhält man durch Integration

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \Phi(\xi) d\xi + C. \quad (2.27)$$

Mit (2.26), (2.21b) und (2.27) folgt somit für $f(x)$ und $g(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \Phi(\xi) d\xi + C \right),$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \Phi(\xi) d\xi - C \right).$$

Einsetzen in $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ liefert die D'ALEMBERTSCHE FORMEL

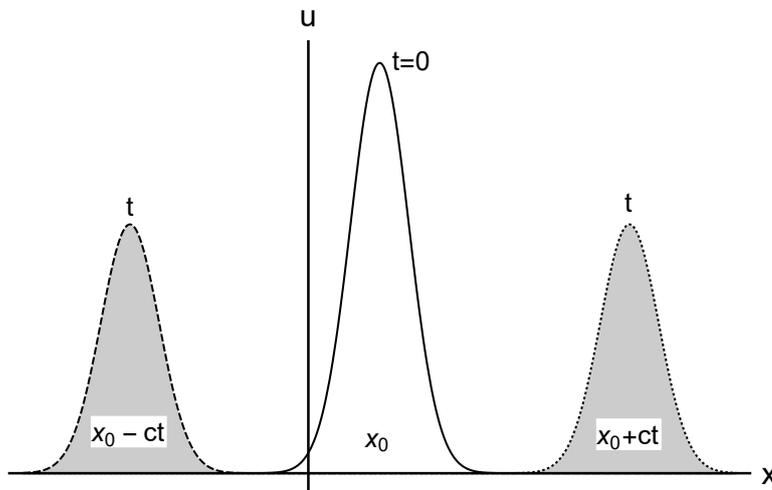
$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Phi(\xi) d\xi \right) \quad (2.28)$$

Spezialfall:

$\varphi(x)$ sei vorgegeben und $\Psi(x) \equiv 0$. Damit ergibt sich die folgende Lösung

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct))$$

d.h. die Anfangsauslenkung teilt sich in zwei gleiche Wellen auf.



(C) Berücksichtigung von Randbedingungen

Gleichung (2.28) löst die Wellengleichung für unbegrenzte Intervalle $-\infty \leq x \leq \infty$. Für Halbgeraden und Intervalle muss die Lösung den Randbedingungen angepasst werden.

1. Fall: Halbgerade $0 \leq x < \infty$ mittels der Fortsetzungsmethode

(a) $u(0, t) = 0$ (Dirichlet-RB)

Bei dieser homogenen Randbedingung muss natürlich $\phi(0) = 0$ gelten und man setzt $\phi(x)$ und $\Phi(x)$ so fort, dass diese auf ganz \mathbb{R} erklärt und antisymmetrisch sind

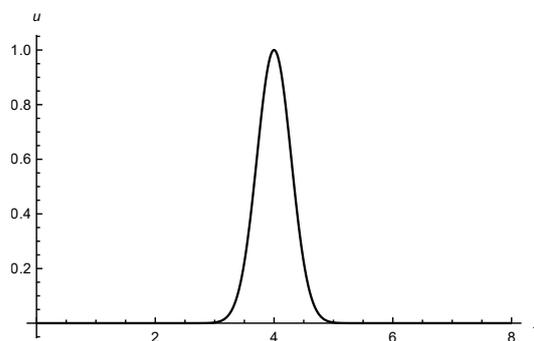
$$\phi(-x) = -\phi(x), \quad \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Damit ergibt sich für die D'Alembert Formel

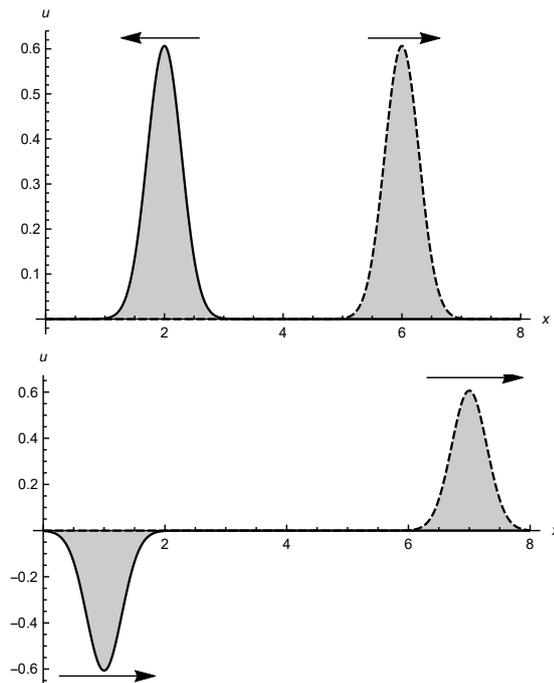
$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(\phi(x + ct) + \phi(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(\xi) d\xi \right)$$

die mit der Randwertaufgabe gelöst wird.

Veranschaulichung:



2.5 Die eindimensionale Wellengleichung



Bei $x = 0$ erfolgt eine Reflexion MIT PHASENSPRUNG.

(b) $u_x(0, t) = 0$ (Neumann-RB)

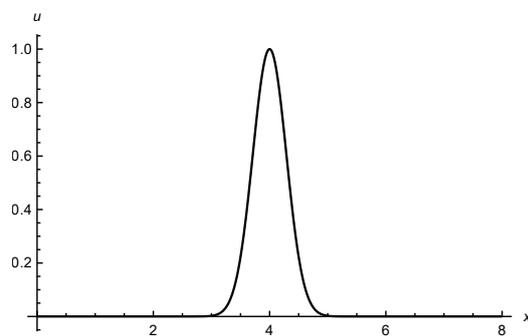
Nun müssen die auf \mathbb{R} fortgesetzten Funktion ϕ , Ψ symmetrisch gewählt werden:

$$\phi(-x) = \phi(x), \quad \Psi(-x) = \Psi(x).$$

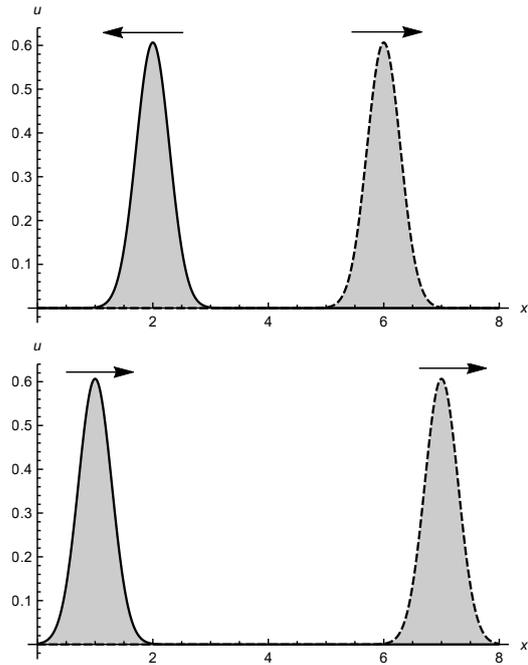
Hiermit erhält man die D'Alembert Formel mit den Randbedingungen

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\phi'(ct)}_{=0} + \underbrace{\phi'(-ct)}_{=0} + \frac{1}{c} \underbrace{(\Psi(ct) - \Psi(-ct))}_{=0} \right]$$

Veranschaulichung:



2 Partielle Differentialgleichungen



Dies entspricht einem freien Ende bei $x = 0$.

Bei $x = 0$ erfolgt eine Reflexion OHNE PHASENSPRUNG.

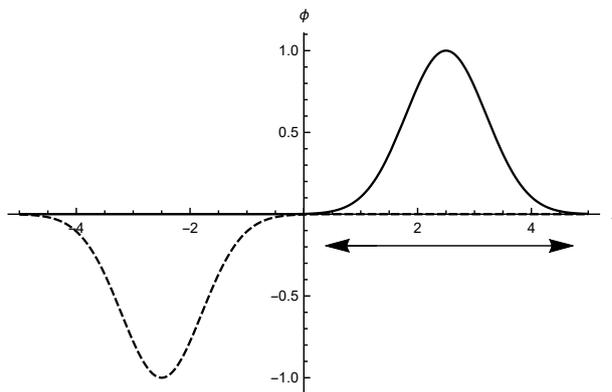
2. Fall: Endliches Intervall $0 \leq x \leq l$ mithilfe der Fortsetzungsmethode

(a) $u(0, t) = u(l, t) = 0$ (Dirichlet-RB)

Dies entspricht einer beidseitig eingespannten Saite. $\phi(x)$ und $\Phi(x)$ werden folgend gewählt:

$$\underbrace{\phi(-x) = -\phi(x), \quad \Psi(-x) = -\Psi(x)}_{\text{ungerade Fortsetzung}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\phi(x + 2l) = \phi(x), \quad \Psi(x + 2l) = \Psi(x)}_{\text{Periodizität}}.$$

Somit erfolgt an den festen Enden eine Reflexion mit Phasensprung.



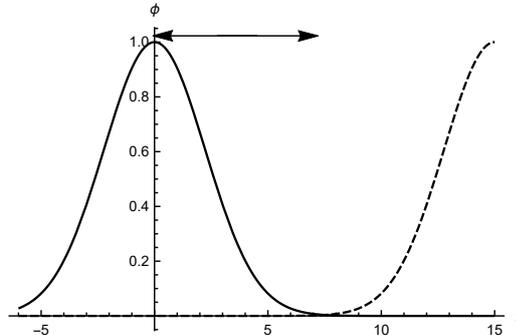
(b) $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ (Neumann-RB)

Entspricht zwei freien Enden bei $x = 0$ und $x = l$. Hier werden $\phi(x)$

und $\Phi(x)$ folgend gewählt:

$$\underbrace{\phi(-x) = \phi(x), \quad \Psi(-x) = \Psi(x)}_{\text{gerade Fortsetzung}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\phi(x + 2l) = \phi(x), \quad \Psi(x + 2l) = \Psi(x)}_{\text{Periodizität}}$$

An den freien Enden findet eine Reflexion bei $x = 0$ ohne Phasensprung statt.



Die D'Alembert-Lösung ist nur für homogene Randwertprobleme direkt anwendbar. Für allgemeinere Randbedingungen empfiehlt sich die Methode von Fourier.

2.5.5 Die Methode von Fourier (Separation)

Die Trennung von Variablen ermöglicht die Ermittlung partikulärer Lösungen der Wellengleichung, die gewöhnlichen DGL und den Randbedingungen genügen. Durch Superposition dieser Funktionen erhalten wir die allgemeine Lösung.

2.5.5.1 Separation der Variablen

Es wird von der homogenen Gleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{2.29}$$

mit der Randbedingung $u(0, t) = u(l, t) = 0$ und Anfangsbedingung $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \Psi(x)$ ausgegangen.

Separationsansatz

$$u(x, t) = X(x)T(t) \tag{2.30}$$

u soll also als Produkt von zwei Funktionen jeweils einer Veränderlichen darstellbar sein. Einsetzen von (2.30) in (2.29) liefert

$$X''T = \frac{1}{c^2} X\ddot{T}.$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Division durch XT liefert

$$\frac{X''}{X}(x) = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T}(t).$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte Seite nur von t abhängt, steht auf jeder Seite eine konstante Funktion. Es wird

$$\frac{X''}{X}(x) = -\lambda^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}}{T}(t) = -\lambda^2$$

gesetzt, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ SEPARATIONSKONSTANTE genannt wird. Man erhält zwei gewöhnliche DGL

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad \ddot{T} + c^2 \lambda^2 T = 0. \quad (2.31)$$

Die DGL (2.31) hat somit folgende Lösungen:

(a) $\lambda = 0$

$$X(x) = a_0 + a_1 x, \quad T(t) = b_0 + b_1 t.$$

Diese Lösung kann die Randbedingungen $u(0, t) = u(l, t) = 0$ nicht erfüllen.

(b) $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} X(x) &= a_1 \cos(\lambda x) + a_2 \sin(\lambda x) \\ T(t) &= b_1 \cos(\lambda ct) + b_2 \sin(\lambda ct) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Diese partikulären Lösungen (2.32) müssen noch an die Anfangsbedingungen und die Randbedingungen angepasst werden.

Randbedingung:

Es muss $X(0) = X(l) = 0$ gelten.

$$\begin{aligned} X(0) &= a_1 \cos(\lambda x) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \\ X(l) &= \underbrace{a_1 \cos(\lambda l)}_{=0} + a_2 \sin(\lambda l) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0 \end{aligned}$$

Die triviale Lösung lautet

$$a_2 = 0.$$

Nichttriviale Lösungen existieren also nur für reelles λ . Diese sind die EIGENWERTE

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die dazugehörigen EIGENFUNKTIONEN lauten

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad T_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right).$$

Somit gilt die allgemeine Lösung für die Gleichung (2.24)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) \right]$$

Die Koeffizienten A_n und B_n lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

Anfangsbedingung

$u(x, t)$ wird im Folgenden an die Anfangsbedingungen angepasst.

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \stackrel{!}{=} \phi(x)$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} cB_n \frac{n\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \stackrel{!}{=} \Psi(x)$$

Dies sind Fourier-Reihen mit Koeffizienten A_n und $cB_n \frac{n\pi}{l}$. Für A_n und B_n gilt somit

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \Psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

Beispiel: Anfangsauslenkung

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{x}{a}u_0 & , \text{für } x \in [0, a] \\ \frac{l-x}{l-a}u_0 & , \text{für } x \in]a, l] \end{cases}$$

Da die Anfangsgeschwindigkeit $\Psi(x) = 0$ folgt $B_n = 0$. Dann gilt für A_n

$$A_n = \frac{2}{l}u_0 \left[\int_0^a \frac{x}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx + \int_a^l \frac{l-x}{l-a} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \right].$$

Mit

$$\int x \sin(bx) dx = \frac{\sin(bx)}{b^2} - \frac{x \cos(bx)}{b}$$

folgt

$$A_n = \frac{2}{l}u_0 \left(\frac{l^2}{n^2\pi^2 a} \sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right) - \frac{l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l}a\right) + \frac{l^2}{n^2\pi^2(l-a)} \sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right) \right. \\ \left. - \frac{1}{l-a} \left[\frac{l^2}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{l^2}{n\pi} \cos(n\pi) + \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \sin(n\pi) + \frac{(a-l)l}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l}a\right) \right] \right) \\ = u_0 \frac{2l^2}{a(l-a)} \frac{\sin\left(n\pi \frac{a}{l}\right)}{(n\pi)^2}.$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Für $a = \frac{l}{2}$ ist $\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right) = 1, 0, -1, 0, 1, \dots$

2.5.5.2 Die inhomogene Wellengleichung

Im Folgenden wird sich mit der ersten Randwertaufgabe für die Gleichung

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x, t)$$

mit Rand- und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} v(0, t) &= \mu_1(t), & v(l, t) &= \mu_2(t), \\ v(x, 0) &= \phi(x), & v_t(x, 0) &= \Psi(x) \end{aligned}$$

beschäftigt. Ziel ist die Reduktion zum homogenen Randwertproblem. Hierfür wird die folgende Hilfsfunktion eingeführt

$$V(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} (\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

Damit wird die Funktion \tilde{u} definiert

$$\tilde{u}(x, t) = -V(x, t) + v(x, t).$$

Es gilt

$$\Rightarrow \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = v_{tt} - c^2 v_{xx} - V_{tt} + \underbrace{cV_{xx}}_{=0} = \underbrace{f(x, t) - V_{tt}}_{\equiv \tilde{f}(x, t)} \quad (2.33)$$

\tilde{u} ist also Lösung der Wellengleichung

$$\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = \tilde{f}(x, t), \quad \tilde{f}(x, t) = f(x, t) - V_{tt}.$$

Es ergeben sich folgende Rand- und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0, t) &= -V(0, t) + v(0, t) = 0, \\ \tilde{u}(l, t) &= -V(l, t) + v(l, t) = 0, \\ \tilde{u}(x, 0) &= -V(x, 0) + \phi(x) \equiv \tilde{\phi}(x), \\ \tilde{u}_t(x, 0) &= -V_t(x, 0) + \Psi(x) \equiv \tilde{\Psi}(x). \end{aligned}$$

Da somit die Zurückführung auf homogene Randbedingungen möglich ist, wird sich im folgenden auf homogene Randwertprobleme beschränkt.

Fourier-Reihen-Ansatz

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (2.34)$$

Somit sind die Randbedingungen erfüllt. Schreibt man $\tilde{f}(x, t)$ ebenfalls als Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \\ f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right) d\xi. \end{aligned}$$

Setze (2.34) in die DGL (2.33) ein

$$\tilde{f}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{\tilde{u}}_n + c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \tilde{u}_n \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Integriert man beide Seiten über $\frac{2}{l} \int_0^l dx \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ und nutze $\frac{2}{l} \int_0^l dx \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \delta_{n,m}$ erhält man

$$\ddot{\tilde{u}}_m(t) + c^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \tilde{u}_m(t) = \tilde{f}_m(t)$$

mit

$$\tilde{f}_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{f}(x, t) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx.$$

Diese gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten hat als spezielle Lösung

$$\tilde{u}_n(t) = \frac{l}{n\pi c} \int_0^t \sin\left[\frac{n\pi}{l}c(t - \tau)\right] \tilde{f}_n(\tau) d\tau.$$

Jede Lösung dieser Gleichung kann bekanntlich als Summe dieser speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und einer Lösung der homogenen Gleichung dargestellt werden. Eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung, die noch den Anfangsbedingungen angepasst werden muss, ist dann

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi c} \int_0^t \sin\left(\frac{n\pi}{l}c(t - \tau)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) f_n(\tau) d\tau. \quad (2.35)$$

Wird die Formel für $f_n(\tau)$ eingesetzt, so erhält man mit der Sprungfunktion $\Theta(t)$ die Green-Funktion der 1D Wellengleichung

$$G(x, \xi, t, \tau) := \Theta(t - \tau) \frac{2}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{l}c(t - \tau)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)$$

2 Partielle Differentialgleichungen

mit der Lösung

$$\tilde{u}(x, t) = \int_0^{\infty} d\tau \int_0^l d\xi G(x, \xi, t, \tau) \tilde{f}(\xi, \tau).$$

Für $\tilde{f}(\xi, \tau) = \delta(x_0 - \xi)\delta(t_0 - \tau)$ mit $0 < \xi < l$ gilt

$$\tilde{u}(x, t) = G(x, x_0, t, t_0).$$

$\tilde{u}(x, t)$ ist die Welle, welche sich nach einem kurzen, bei $x = \xi$ konzentrierten, Stoß einstellt. G erfüllt die DGL

$$\left(G_{tt} - c^2 G_{xx} \right) (x, \xi, t, \tau) = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau).$$

Eine beliebige Kraft lässt sich als Zusammenspiel vieler kurzer, konzentrierter Kraftstöße deuten. Dementsprechend ist die resultierende Lösung die Superposition der Reaktionen auf die einzelnen Kraftstöße.

2.6 Wärmeleitung im Draht

Problemstellung

Ein wärmeleitfähiger Draht der Länge l habe an der Stelle x zur Zeit $t > 0$ die Temperatur $u(x, t)$. Aus der Kontinuitätsgleichung für die Wärmemenge folgt (nach Umskalierung der phys. Konstanten) die DGL

$$\underbrace{u_t(x, t)}_{\rho \cdot c} = \underbrace{u_{xx}(x, t)}_{\kappa}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (2.36)$$

Die materialabhängigen, zeitlich konstanten Funktionen sind:

ρ : Dichte

c : spezifische Wärmekapazität

κ : Wärmeleitfähigkeit

Durch ein Wärmebad werden die Drahtenden auf gleicher, konstanter Temperatur gehalten. Wählen wir diese als Nullpunkt der Temperaturskala, so gilt

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \text{für } t \geq 0. \quad (2.37)$$

Gegeben ist die Anfangstemperaturverteilung

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{mit } f(0) = f(l) = 0. \quad (2.38)$$

Mit f als stückweise glatte Funktion $f \in PC^1[0, l]$. Gesucht ist die ZEITENTWICKLUNG FÜR $t > 0$. [4]

2.6.1 Produktlösungen und Superpositionsansatz

Separationsansatz

$$u(x, t) := v(x)\omega(t), \quad \text{mit } v \in C^2[0, l], \quad \omega \in C^1(\mathbb{R}_+)$$

führt auf die gewöhnlichen DGL

$$\begin{aligned} v'' + \lambda^2 v &= 0, & v(0) &= v(l) = 0, \\ \dot{\omega} + \lambda^2 \omega &= 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Wie bei der Wellengleichung gilt

$$\lambda = \lambda_n := \frac{n\pi}{l}.$$

Aus (2.39) folgt, dass $u_n(x, t) := e^{-\lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x)$ Gleichung (2.36) mit den Randbedingungen (2.37) löst. Um die Lösung für die Anfangsbedingungen (2.38) zu finden, machen wir den Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t).$$

Die Koeffizienten a_n werden so bestimmt, dass sie die Anfangsbedingung erfüllen

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x).$$

Wegen des Eindeutigkeitsatzes für Fourier-Reihen sind für a_n die Fourier-Koeffizienten der Fourier-Sinus-Reihe von f zu wählen

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\lambda_n x) dx$$

2.6.2 Existenz einer Lösung

Satz: Für jede stückweise glatte Anfangsverteilung f der Temperatur mit $f(0) = f(l) = 0$ besitzt das Wärmeleitungsproblem definiert durch (2.36), (2.37), (2.38) die Lösung

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

mit

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx.$$

Die Eindeutigkeit wird später bewiesen.

2 Partielle Differentialgleichungen

Beweis: $\Omega := \{(x, t) \mid 0 < x < l, t > 0\}$

Die Funktion $f \in PC^1[0, l]$ besitzt die Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{nx\pi}{l}\right)$$

mit

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{nx\pi}{l}\right) dx,$$

wobei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Daher ist durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

eine auf Ω stetige Funktion gegeben, denn diese Reihe hat die Majorante $\sum_n |a_n|$, konvergiert also gleichmäßig auf Ω . Wir fixieren ein $\tau > 0$. Da die Folge (a_n) als Nullfolge beschränkt ist, konvergiert die Reihe

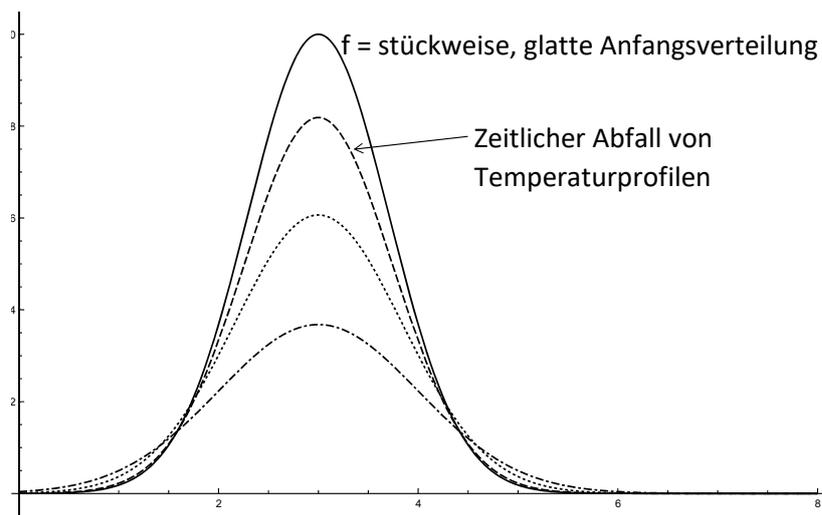
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 |a_n| e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tau}$$

und liefert für $t \geq \tau$, $x \in [0, l]$ eine Majorante für die Reihen

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)}_{=\partial_x u(x,t)} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)}_{=\partial_x^2 u(x,t) = \partial_t u(x,t)}.$$

Die Wärmeleitungsgleichung ist in jedem Bereich $\{(x, t) \in \Omega \mid t \geq \tau\}$ mit $\tau > 0$ erfüllt, d.h. in Ω .

Beispiel:

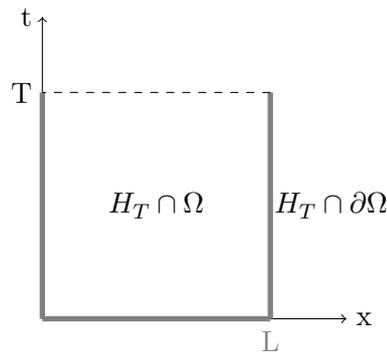


2.6.3 Maximumsprinzip und Eindeigkeitssatz

Satz: Seien $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < l, t > 0\}$ und H_T die abgeschlossene Halbebene $\{(x, t) \mid t \leq T\}$ mit $T > 0$. Dann gilt für jede auf $\bar{\Omega}$ stetige Lösung u der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \min_{H_T \cap \partial\Omega} u &\leq u(x, t) \leq \max_{H_T \cap \partial\Omega} u \\ \forall (x, t) &\in H_T \cap \Omega \\ \bar{\Omega} &\equiv \Omega \cup \partial\Omega \end{aligned}$$

Das Maximum bzw. Minimum von u auf der kompakten Menge $H_T \cap \bar{\Omega}$ wird also auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω angenommen.



Beweis: Zeige zunächst, dass für $(x, t) \in \Omega \cap H_T$ gilt

$$u(x, t) \leq \max\{u(x, t) \mid (x, t) \in \partial\Omega \cap H_T\}.$$

Zum Beweis setze für jedes $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) + \epsilon x^2 \\ \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) &= -2\epsilon < 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Das Max. von v auf $\bar{\Omega} \cap H_T$ werde an der Stelle (x_0, t_0) angenommen.

Behauptung: $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \cap H_T$

Wäre dies nicht der Fall, also $0 < t_0 \leq T$ und $0 < x_0 < l$, so wäre

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, t_0) &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, t_0) &\leq 0 \end{aligned}$$

2 Partielle Differentialgleichungen

sowie

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) = 0, \quad \text{falls } t_0 < T$$

bzw.

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0, \quad \text{falls } t_0 = T.$$

Eine negative Steigung kann nicht angenommen werden, da sonst das Maximum im Inneren läge. Daher gilt hier

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, t_0) \geq 0.$$

Für $(x, t) \in \Omega \cap H_T$ findet man

$$\begin{aligned} u(x, t) &\leq v(x, t) \leq v(x_0, t_0) \leq u(x_0, t_0) + \epsilon L^2, \\ \sup_{H_T \cap \Omega} u &\leq \max_{H_T \cap \partial \Omega} (u + \epsilon L^2), \quad \text{für jedes } \epsilon > 0. \end{aligned}$$

Nach dem Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ folgt damit die Behauptung. Die Abschätzung von $u(x, t)$ nach unten folgt durch Ersetzen von u durch $-u$. Daraus folgt direkt der EINDEUTIGKEITSSATZ:

Satz: Es gibt höchstens eine auf $\bar{\Omega}$ stetige Lösung u der Wärmeleitungsgleichung mit vorgeschriebenen Werten auf dem Rand von Ω , d.h. mit den Anfangswerten $u(x, 0) = f(x)$ ($0 \leq x \leq l$) und den Randwerten $u(0, t) = g(t)$, $u(l, t) = h(t)$ ($t \geq 0$).

Beweis: Für zwei Lösungen u_1, u_2 mit gleichen Randdaten wenden wir das Max-Prinzip auf $u_2 - u_1$ an.

Lit.: [3]

2.7 3D Wellengleichung

In Feldtheorien wie z.B. der Elektrodynamik, der Akustik, der relativistischen Quantenfeldtheorie stößt man häufig auf den 3-dimensionalen Fall der Wellengleichung.

2.7.1 Die Poisson-Formel und das Huygenssche Prinzip

Die HOMOGENE 3-DIMENSIONALE WELLENGLEICHUNG MIT ANFANGSBEDINGUNG lautet

$$c^2 \underbrace{(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})}_{=\Delta u(\vec{x}, t)} = u_{tt} \quad (2.41)$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ und den Anfangsbedingungen

$$u(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}), \quad u_t(\vec{x}, 0) = \psi(\vec{x}).$$

Betrachtet wird zunächst das einfachere Problem, beschrieben durch die Gleichung (2.41) und den Anfangsbedingungen mit $\varphi(\vec{x}) = 0$. Dieses Problem lässt sich durch Fouriertransformation lösen und man erhält:

$$u(\vec{x}, t) = t\bar{\psi}$$

mit

$$\bar{\psi}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi(x + ct \sin \phi \cos \theta, y + ct \sin \phi \sin \theta, z + ct \cos \phi) (ct)^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

Dies ist der Mittelwert der Anfangsanregung $\psi(\vec{x})$ über eine Kugeloberfläche mit dem Radius ct .

Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x' &= \underbrace{ct}_r \sin \phi \cos \Theta \\ y' &= r \sin \phi \sin \Theta \\ z' &= r \cos \phi \end{aligned}$$

Beweis: (Skizze)

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3 k u(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}} \\ c^2 \Delta u(\vec{x}, t) - \ddot{u}(\vec{x}, t) &= 0 \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3 k \left(\underbrace{c^2 k^2 u(\vec{k}, t) + \ddot{u}(\vec{k}, t)}_{\text{neue DGL}} \right) e^{i\vec{k}\vec{x}} &= 0 \end{aligned}$$

$e^{i\vec{k}\vec{x}}$ ist eine linear unabhängige Funktion für unterschiedliche \vec{k}

$$c^2 k^2 u(\vec{k}, t) = -\ddot{u}(\vec{k}, t).$$

allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} u(\vec{k}, t) &= \alpha(\vec{k}) \sin(kct) + \beta(\vec{k}) \cos(kct) \\ u(\vec{k}, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Da $\varphi(\vec{x}) = 0$, gilt nun

$$\begin{aligned} \beta(\vec{k}) &= 0 \\ \dot{u}(\vec{x}, 0) &= \psi(\vec{x}) \\ \alpha(\vec{k}) &= \frac{\psi(\vec{k})}{kc} \\ u(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3 k \psi(\vec{k}) \frac{\sin(kct)}{kc} e^{i\vec{k}\vec{x}} \end{aligned}$$

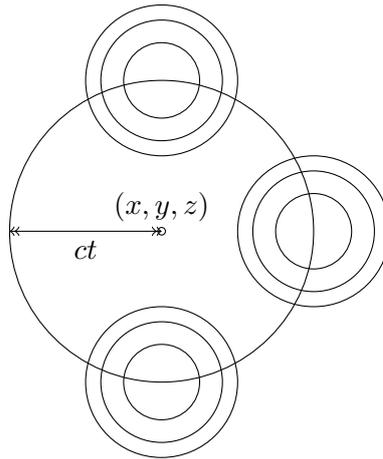
2 Partielle Differentialgleichungen

und nach weiterem Umformen erhält man $u(\vec{x}, t) = t\bar{\psi}(\vec{x})$ mit

$$\bar{\psi}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi(x + ct \sin \phi \cos \theta, y + ct \sin \phi \sin \theta, z + ct \cos \phi) (ct)^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta$$

Interpretation

Die Anfangsanregung propagiert sphärisch (mit Geschwindigkeit c) von jedem Punkt \vec{x} nach außen.



Nach einer Zeit t wird die Lösung der DGL am Punkt \vec{x} durch die Anfangsanregung auf einer Kugel (mit Radius ct) um \vec{x} herum bestimmt. Für den Fall

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, 0) &= \varphi(\vec{x}), \\ \dot{u}(\vec{x}, 0) &= 0 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (t\bar{\psi}(\vec{x}, t)) \\ &= \bar{\psi}(\vec{x}, t) + t\dot{\bar{\psi}}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

und für $t = 0$ ergibt sich

$$\bar{\psi}(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}).$$

Der zweite Teil des Problems lautet:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{2.42}$$

mit der Anfangsbedingung $u = \varphi$ und $u_t = 0$. Ein Theorem von Stokes besagt, dass man die Lösung dieses Problems aus der Lösung des Problems mit der Anfangsbedingung $u = 0$ und $u_t = \varphi$ erhält, in dem man die daraus resultierende Lösung nach t differenziert.

$$u(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} [t \bar{\varphi}(\vec{x}, t)]$$

löst somit (2.42).

Wir können uns das Theorem von Stokes sehr einfach in 1D plausibel machen. Nach der Methode von D'Alembert löst

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi(s) ds$$

das Problem $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit der Anfangsbedingung $u = 0$ und $u_t = \phi$. Wie wir in Gleichung (2.42) gezeigt haben, löst

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{1}{2c} [\phi(x+ct) \cdot c - \phi(x-ct) \cdot (-c)] \\ &= \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] \end{aligned}$$

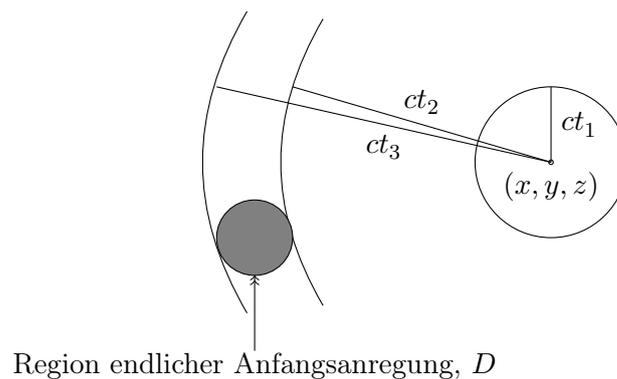
das Problem $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit der Anfangsbedingung $u = \psi$, $u_t = 0$. Die allgemeine Lösung von (2.41) lautet dann

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= t \bar{\phi} + \frac{\partial}{\partial t} [t \bar{\varphi}] \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \left[\frac{1}{t} \int_{|\vec{y}-\vec{x}|=ct} \phi(\vec{y}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{|\vec{y}-\vec{x}|=ct} \varphi(\vec{y}) dS \right) \right]. \end{aligned}$$

Die ist die POISSON-FORMEL, was die 3D-Verallgemeinerung der D'Alembert-Formel in (2.41) ist.

Interpretation: Huygenssches Prinzip

Wir untersuchen nun, welchen Einfluss eine auf den Bereich D begrenzte, kurze Anregung auf den Punkt \vec{x} außerhalb von D hat.



2 Partielle Differentialgleichungen

Der 3-dimensionale Fall:

Aus der Poisson-Formel wird ersichtlich, dass nur Anfangswerte auf der Kugeloberfläche um \vec{x} mit Radius ct_1 einen Einfluss auf den Beobachterstandort \vec{x} haben. Diese Oberfläche muss also in D "eindringen", damit in \vec{x} eine Anregung beobachtbar ist. Die räumlich lokalisierte Anfangserregung ruft also in jedem Punkt \vec{x} eine zeitlich begrenzte Welle hervor. In diesem Fall spricht man vom HUYGENSSCHEN PRINZIP.

Der 2-dimensionale Fall:

Man erkennt, dass alle Anfangswerte innerhalb des Kreises um \vec{x} mit dem Radius ct_1 die Wellenanregung bei \vec{x} beeinflussen können. Die Anfangswerte außerhalb dieses Kreises spielen keine Rolle. Solange die Kreisfläche den Bereich D nicht schneidet, findet bei \vec{x} keine Erregung statt. Für $ct_1 > ct_3$ liegt D jedoch komplett im Kreis; daher ist auch für $ct > ct_3$ bei \vec{x} eine Nachwirkung der Anfangsanregung beobachtbar, $u(\vec{x}, t)$ verschwindet im allgemeinen nicht! Eine kurze Anfangsanregung in D verursacht zwar eine scharfe vordere Wellenfront, eine scharfe hintere Wellenfront existiert aber nicht. Das HUYGENSSCHE PRINZIP GILT IM 2-DIMENSIONALEN FALL NICHT.

Allgemein kann man feststellen, dass das Huygenssche Prinzip bei ungerader Dimension größer gleich drei gilt.

Zum Vergleich:

(1D)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

hängt von $\psi(s)$ im Intervall $s \in [x - ct, x + ct]$ ab.

Daher gilt es in 1D nicht.

2.8 Helmholtz-Gleichung und Potentialtheorie

Die Wellengleichung

$$c^2 \Delta u(\vec{x}, t) - u_{tt}(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.43)$$

mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{C}$ folgt aus der 3D Wellengleichung nach Abseparation der Zeit

$$c^2 \Delta u(\vec{x}, t) - u_{tt}(\vec{x}, t) = 0$$

Mit dem Separationsansatz $u(\vec{x}, t) = U(\vec{x})v(t)$ ergibt sich

$$\frac{\ddot{v}(t)}{c^2 v(t)} = \frac{\Delta U(\vec{x})}{U(\vec{x})} =: -k^2.$$

Mit $\omega = kc$ gilt für $v(t)$

$$\ddot{v}(t) + \omega^2 v(t) = 0$$

und somit ist die Lösung für $v(t)$ eine monochromatische Welle

$$v(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}.$$

Die Spezialfälle der Helmholtz-Gleichung sind der homogene Fall mit

$$\Delta U(\vec{x}) = 0$$

als die POTENTIALGLEICHUNG (LAPLACE-GLEICHUNG) für $k = 0$ und der inhomogene Fall mit

$$\Delta U(\vec{x}) = h(\vec{x})$$

als die POISSON-GLEICHUNG. Alle diese Gleichungen sind ELLIPTISCHE DGL 2. ORDNUNG mit konstanten Koeffizienten.

Interpretation als Eigenwert-Gleichung:

$$\Delta U(\vec{x}) = -k^2 U(\vec{x}) = \lambda U(\vec{x})$$

Hier ist λ ein Eigenwert des Laplace-Operators.

2.8.1 Radialsymmetrische Lösungen

Um das Problem zu vereinfachen, nützt man die Symmetrie aus wobei es keine Winkelabhängigkeit geben darf. Dies sind die RADIALSYMMETRISCHEN Lösungen, die nur von $r = |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}$ abhängen

$$U(\vec{x}) = f(r).$$

Der Radialteil des Laplace-Operators im \mathbb{R}^n ist nach [5]

$$\Delta_r = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Aus Gleichung (2.37) folgt die radialsymmetrische Lösung

$$u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) + k^2 u(r) = 0.$$

Mit dem Ansatz

$$u(r) = r^{-\frac{n-2}{2}} g(kr), \quad \rho = kr$$

erhält man nun

$$g''(\rho) + \frac{1}{\rho} g'(\rho) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) g(\rho) = 0$$

mit

$$\nu = \frac{n-2}{2}.$$

Dies entspricht der BESSEL-DGL mit Index ν .

2.8.2 Potenzreihenansatz und spezielle Funktionen

Literaturempfehlung [2]

Diese Methode zur Lösung linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung lässt sich dann anwenden, wenn man alle Koeffizienten und die rechte Seite in Potenzreihen entwickeln lassen kann. Die Lösungen sind dann ebenfalls Potenzreihen.

2.8.2.1 Potenzreihenansatz

Im Folgenden werden wir uns auf den Fall einer Gleichung zweiter Ordnung einschränken

$$y'' + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (2.44)$$

auf dem Intervall $(-r, r) \subseteq \mathbb{R}$ und mit der Voraussetzung, dass p , q und f auf $(-r, r)$ konvergente Potenzreihen darstellen

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Mit der Annahme, die Lösung auch als Potenzreihe schreiben zu können, die in $(-r, r)$ konvergiert, gilt

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Nun muss man die Koeffizienten a_n bestimmen. Für die Ableitungen von $y(x)$ gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \stackrel{n'=n-1}{=} \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+1) a_{n'+1} x^{n'} \\ &\stackrel{n'=n}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (2.44) ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) \\ + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \end{aligned}$$

Infolge der Cauchyschen Produktformel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} \right) x^n \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right) x^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \end{aligned}$$

Und mit dem Koeffizientenvergleich für jedes $n \in \mathbb{N}$ erhält man

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} = f_n.$$

Hiermit hat man eine Rekursionsformel zur Bestimmung der a_n hergeleitet. Man wählt a_0 und a_1 entsprechend der Anfangsbedingung oder frei und berechnet nacheinander a_2, a_3, \dots

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(f_n - \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1}p_{n-k} - \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \right), \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \quad (2.45)$$

Eine Lösung existiert dann, wenn man die Lösung von (2.44) wie $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ schreiben kann. Dann sind die Koeffizienten a_2, a_3, \dots eindeutig durch a_0 und a_1 bestimmbar. Nachdem man (2.45) bestimmt hat, geht man genau umgekehrt vor. Zu beliebig gewählten Anfangsbedingungen a_0 und a_1 definieren wir a_n für $n \geq 2$ durch (2.45) und man zeigt, dass die Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-r, r)$ konvergiert.

Aus der Herleitung folgt dann, dass

$$y(x) := \sum_k^{\infty} a_n x^n, \quad \text{auf } (-r, r)$$

eine Lösung von (2.44) ist und man durch entsprechende Wahl von a_0 und a_1 alle Lösungen auf diesem Weg erhalten kann.

Satz: Auf $(-r, r)$ sei die Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

gegeben, und die Funktionen p, q und f seien auf $(-r, r)$ in die Potenzreihen

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

2 Partielle Differentialgleichungen

entwickelbar. Sind dann $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ gegeben und bestimmen wir a_n für $n \geq 2$ durch (2.45), so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-r, r)$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung, die den Anfangsbedingungen $y(0) = a_0$, $y'(x) = a_1$ genügt. [2, S.73f]

Anmerkungen:

Falls p , q und f Polynome sind, dann kann man r beliebig groß wählen und die Reihe von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert auf ganz \mathbb{R} .

Interessiert man sich an einem Lösungsfundamentalsystem, bestimmt man beispielsweise Lösungen mit $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ und $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$.

Die Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit reell-analytischen Daten ist wiederum auch reell-analytisch, was der obige Satz bestätigt.

2.8.2.2 Spezielle Differentialgleichungen

Die folgenden DGL beschreiben wichtige physikalische Probleme.

1. Hermitesche DGL (Quanten Harmonischer Oszillator)

$$\begin{aligned}y'' + 2xy' + \lambda y &= 0, \\p(x) &= -2x, \quad p_0 = 0, \quad p_1 = -2, \quad p_i = 0, \quad (i \neq 0, 1) \\q(x) &= \lambda, \quad q_0 = \lambda, \quad q_{i \neq 0} = 0, \\f_n &= 0\end{aligned}$$

mit λ als reellen Parameter. Infolge der Rekursionsformel ergibt sich

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(0 - (-2)na_n - \lambda a_n) = a_n \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Für den Fall, dass $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$, erhält man die Lösung

$$\begin{aligned}y_1^{(\lambda)}(x) &= 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 - \dots, \\a_2 &= a_2 \frac{-\lambda}{1 \cdot 2} = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{\lambda}{2!},\end{aligned}$$

und für $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$, erhält man die Lösung

$$y_2^{(\lambda)}(x) = x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7 + \dots$$

Beide dieser Funktionen bilden ein Fundamentalsystem für die Hermitesche DGL. Wählt man speziell ein λ mit $\lambda = 2n$ folgt aus der Rekursionsformel

2.8 Helmholtz-Gleichung und Potentialtheorie

$a_{n+2} = 0$. Falls n gerade ist, dann ist $y_1^{(2n)}$ ein Polynom, ist n jedoch ungerade, so ist $y_2^{(2n)}$ ein Polynom. Speziell gilt

$$\begin{aligned} y_1^{(0)}(x) &= 1, \\ y_2^{(2)}(x) &= x, \\ y_1^{(4)}(x) &= 1 - 2x^2, \\ y_2^{(6)}(x) &= x - \frac{2}{3}x^3, \\ y_1^{(8)}(x) &= 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Werden diese Polynome noch so normiert, dass der Koeffizient vor x^n gleich 2^n wird, erhält man die HERMITE-POLYNOME, welche auch geschrieben werden können als

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}.$$

Eigenfunktion des qm. HO

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= (-1)e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right) e^{-x^2} \\ &= (-1)e^{x^2} (-2x) e^{-x^2} \\ &= 2x, \\ y_1^{(0)} &= 1 \hat{=} H_0(x), \\ y_2^{(2)} &= x \hat{=} \frac{H_1(x)}{2}, \\ y_1^{(4)}(x) &= 1 - 2x^2 \hat{=} \frac{H_2(x)}{-2}, \\ y_2^{(6)}(x) &= x - \frac{2}{3}x^3 \hat{=} \frac{H_3(x)}{-12}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

2 Partielle Differentialgleichungen

mit

$$\begin{aligned}H_n(x) &:= (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}, \\H_2(x) &= 1e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(-2xe^{-x^2} \right) \\&= e^{x^2} \left(-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} \right) \\&= -2 + 4x^2 \\&= -2 \left(1 - 2x^2 \right), \\H_3(x) &= -1e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} \right) \\&= -e^{x^2} \left(4xe^{-x^2} + 8xe^{-x^2} - 8x^3 e^{-x^2} \right) \\&= -e^{-x^2} \left(12xe^{-x^2} - 8x^3 e^{-x^2} \right) \\&= -12x + 8x^3 \hat{=} (-12)y_2^{(6)}(x).\end{aligned}$$

Es existiert somit die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}.$$

2. Legendresche Differentialgleichung (ED + QM)

Dies ist die Gleichung

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2} y = 0,$$

die nun auf dem Intervall $(-1, 1)$ betrachtet wird, wo auch λ wieder ein reeller Parameter ist. Dafür wird

$$\begin{aligned}p(x) &= -\frac{2x}{1-x^2} = -2 \sum_k^{\infty} x^{2n+1}, \\q(x) &= \frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2} = \lambda(\lambda+1) \sum_k^{\infty} x^{2n}.\end{aligned}$$

Dies sind geometrisch Reihen. Auch gilt $f(x) = 0$. Die Reihen konvergieren ebenfalls auf dem Intervall $(-1, 1)$ und man kann wieder den Satz anwenden. Die Koeffizienten dieser Reihe zu bestimmen ist jedoch recht aufwendig und zur Vereinfachung multipliziert man die DGL mit $(1-x^2)$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0$$

und setzt den Ansatz $y(x) = \sum_k a_n x^n$ in diese neue Gleichung ein

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n}_{y''(x)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n}_{-x^2 y''(x)} - 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n}_{-2xy'(x)} + \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Danach führt man einen Koeffizientenvergleich durch

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \lambda(\lambda+1) = 0,$$

also

$$a_{n+2} = a_n \frac{n(n+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+1)(n+2)} = a_n \frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Für den Fall, dass $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$, sind hier alle geraden a_n endlich und alle ungeraden verschwinden

$$y_1^{(\lambda)} = 1 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+3)}{4!}x^4 \mp \dots,$$

$$a_2 = 1 \frac{0 - \lambda(\lambda+1)}{1 \cdot 2} = -\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}.$$

Sind jedoch $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$, werden die ungeraden a_n endlich und alle geraden verschwinden.

$$y_2^{(\lambda)} = x - \frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{3!}x^3 + \dots x^5 \mp \dots,$$

$$a_3 = 1 \frac{(1-\lambda)(\lambda+2)}{2 \cdot 3} = -\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{3!}.$$

Diese Lösungen bilden ein Lösungsfundamentalsystem. Wählt man $\lambda := n \in \mathbb{N}$, so reduziert sich abwechselnd eine der beiden Lösungen auf ein Polynom vom Grad n .

$$y_1^{(0)}(x) = 1,$$

$$y_2^{(1)}(x) = x,$$

$$y_1^{(2)}(x) = 1 - 3x^2,$$

$$y_2^{(3)}(x) = x - \frac{5}{3}x^3,$$

$$y_1^{(4)}(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4,$$

$$\vdots$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Werden die Polynome so normiert, dass sie an der Stelle $x = 1$ den Wert eins annehmen, so erhält man das LEGENDRE-POLYNOM in der Form

$$p_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n.$$

Allgemeine Lösung ist somit die Überlagerung aller möglichen Teillösungen.

3. Die Besselsche Differentialgleichung

Diese hat die Form

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0,$$

welche auf dem Intervall $(0, \infty)$ betrachtet wird und λ wieder ein reeller Parameter ist. Man kann die DGL auch in der Form

$$g''(\rho) + \frac{1}{\rho} g'(\rho) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) g(\rho) = 0$$

schreiben. Der frühere Ansatz $y(x) = \sum_k a_n x^n$ ist hier nicht mehr anwendbar, da man die Koeffizienten nicht um Null in eine Potenzreihe entwickeln kann. Stattdessen wählt man den modifizierten Ansatz, mit bestimmten Werten von λ ,

$$y(x) = x^\lambda \sum_k a_n x^n, \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

als Parameter. Um jedoch eine befriedigende Lösung zu finden, erfordert es Methoden der Funktionentheorie. Hierfür wird die Gammafunktion benötigt

$$\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Für $n \geq 1$ ergibt sich hieraus

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+1)x\Gamma(x), \quad \text{für } x > 0.$$

Infolge dieser Identität ist es erlaubt die Gammafunktion auf $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ fortzusetzen mit

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)(x+n-2) \cdots (x+1)x}, \quad \text{für } x \in (-n, \infty) \setminus (-\mathbb{N}_0),$$

z.B.

$$\Gamma(-9, 5) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(-9, 5 + 10 - 1) \cdots (-9, 5)}.$$

Somit erhält man eine wohldefinierte Funktion $\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, die der Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$$

genügt.

Lemma: Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Dann konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Setzt man zur Abkürzung

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n\Gamma(n+1+\lambda)}$$

und betrachtet die Reihe

$$\sum_n^{\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Mit der Funktionalgleichung für die Gammafunktion erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{n! \Gamma(n+1+\lambda)}{(n+1)! \Gamma(n+2+\lambda)} = \frac{\Gamma(n+1+\lambda)}{(n+1)(n+1+\lambda) \Gamma(n+1+\lambda)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+1+\lambda)}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt die Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$ und für alle $x \in (0, \infty)$ ergibt sich aus diesem Lemma die Konvergenz der Reihe

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}$$

Diese Funktionen $J_\lambda : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißen BESSELFUNKTIONEN ERSTER ART.

Lemma: Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Dann ist J_λ auf $(0, \infty)$ eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung.

Beweis: Man setze zur Abkürzung

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+\lambda) 2^{2n+\lambda}}$$

und erhält

$$J_\lambda(x) = x^\lambda \sum_n^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_n^{\infty} a_n x^{2n+\lambda}.$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Da man konvergente Potenzreihen auf einfache Weise differenzieren kann, gilt

$$J'_\lambda(x) = \sum_n^\infty a_n(2n + \lambda)x^{2n-1+\lambda},$$

$$J''_\lambda(x) = \sum_n^\infty a_n(2n + \lambda)(2n - 1 + \lambda)x^{2n-2+\lambda}.$$

Wird $a_{-1} := 0$, $n + 1 = n'$ und $n = n' - 1$ gesetzt, so ergibt sich

$$J_\lambda(x) = \sum_{n'=1}^\infty a_{n'-1}x^{2n'+\lambda},$$

$$x^2 J''_\lambda(x) + x J'_\lambda(x) + (x^2 - \lambda^2) J_\lambda(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \sum_n^\infty \left((2n + \lambda)(2n - 1 + \lambda)a_n + (2n + \lambda)a_n + a_{n-1} - \lambda^2 a_n \right) x^{2n+\lambda}$$

$$= \sum_n^\infty \left((4n^2 + 4n\lambda)a_n + a_{n-1} \right) x^{2n+\lambda},$$

Andererseits gilt

$$(4n^2 + 4n\lambda)a_n = 4n(n + \lambda) \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + 1 + \lambda) 2^{2n+\lambda}}$$

$$= \frac{(n + \lambda)(-1)^n n}{n! (n + \lambda) \Gamma(n + \lambda) 2^{2(n-1)+\lambda}}$$

$$= - \frac{(-1)^{n-1}}{(n - 1)! \Gamma(n + \lambda) 2^{2(n-2)+\lambda}} = -a_{n-1}.$$

Es verschwinden somit alle Koeffizienten in der Summe $\sum_n^\infty \left((4n^2 + 4n\lambda)a_n + a_{n-1} \right) x^{2n+\lambda}$; das heißt J_λ löst die Besselsche Differentialgleichung.

Satz: Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dann bilden J_λ und $J_{-\lambda}$ ein Lösungsfundamentalsystem der Besselschen DGL.

Beweis: Infolge des vorherigen Lemmas muss man nur noch die lineare Unabhängigkeit der Funktionen J_λ und $J_{-\lambda}$ zeigen. Dies folgt aus

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} J_\lambda(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} J_{-\lambda}(x) = \infty \quad \text{für } \lambda > 0$$

was man leicht mit der Definition von J_λ bestätigen kann.

In besonderen Fällen lassen sich die Besselfunktionen durch bekannte Funktionen darstellen.

Satz: Für alle $x > 0$ ist

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad \text{und} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Beweis: Es wird erst einmal die erste Beziehung berechnet mit dem speziellen Fall

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2n+3}{2}\right) = \frac{2n+1}{2} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \dots \\ &= \frac{2n+1}{2} \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n+1) \dots 3 \cdot 1}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+1)!}{n! 2^n 2^{n+1}} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+1)!}{n! 2^{2n}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Woraus folgt

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! 2^{2n}}{n! (2n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Formel

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

gilt somit

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{x} \sin x}{\sqrt{\pi} x} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \end{aligned}$$

Anmerkung:

Falls $\lambda = n \in \mathbb{N}$ ist J_{-n} nicht definiert. Trotzdem kann man J_n durch eine sogenannte BESSELSCHES FUNKTION ZWEITER ART oder auch NEUMANNSCHE

2 Partielle Differentialgleichungen

FUNKTION N_n zu einem Fundamentalsystem für die Besselsche Differentialgleichung ergänzen. Diese Funktionen N_n sind definiert durch

$$N_n(x) := \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{J_\lambda(x) \cos(\pi\lambda) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\pi\lambda)}.$$

Allgemein gilt somit

$$N_\lambda(x) = \frac{J_\lambda(x) \cos(\pi\lambda) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\pi\lambda)}.$$

Die HANKELFUNKTIONEN sind Linearkombinationen von $J_\lambda(\rho)$ und $N_\lambda(\rho)$

$$\begin{aligned} H_\lambda^{(1)}(x) &= J_\lambda(x) + iN_\lambda(x), \\ H_\lambda^{(2)}(x) &= J_\lambda(x) - iN_\lambda(x), \end{aligned}$$

die zusammen ein Fundamentalsystem der Lösungsgesamtheit der Bessel DGL bilden. Jede Lösung lässt sich schreiben als

$$f(x) = \alpha H_\lambda^{(1)}(x) + \beta H_\lambda^{(2)}(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Asymptotische Verhalten von Bessel- und Neumann-Funktionen

Für $x \ll 1$ (in einer Kugel)

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad \nu \geq 0, \\ N_\nu(x) &\rightarrow \begin{cases} -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, & \nu > 0 \\ \frac{2}{\pi} [\ln(\frac{x}{2}) + C], & \nu = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Für $x \gg 1$

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ N_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Der Übergang des asymptotischen Verhalten bei kleinen x -Werten zu dem bei großen x -Werten vollzieht sich bei $x \sim \nu$.

Radialsymmetrische Lösung der Helmholtz-Gleichung in n Raumdimensionen

$$f(r) = \alpha r^{-\frac{n-2}{2}} H_{\frac{n-2}{2}}^{(1)}(kr) + \beta r^{-\frac{n-2}{2}} H_{\frac{n-2}{2}}^{(2)}(kr), \quad n \in \mathbb{N} \hat{=} \text{Dimension des Raumes}$$

Spezialfall für $k = 0$ geht die Helmholtz-Gleichung in die Laplace-Gleichung über

$$\begin{aligned} f(r) &= \alpha r^{-n+2} + \beta, & n \neq 2, \\ f(r) &= \alpha \ln r + \beta, & n = 2. \end{aligned}$$

Fallunterscheidung nach Dimensionen

$n = 3$ nutze $H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz}$ und $H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz}$ und der Annahme $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(r) &= \alpha \frac{e^{ikr}}{r} + \beta \frac{e^{-ikr}}{r} \quad \text{für } k \neq 0 \\ f(r) &= \frac{\alpha}{r} + \beta \quad \text{für } k = 0 \end{aligned}$$

$n = 2$ nutze $H_0^{(1)}(kr) = \frac{2i}{\pi} \left(\ln \frac{kr}{2} + C - \frac{i\pi}{2} \right)$ für $(kr) \ll 1$ und $H_0^{(2)}(kr) = \left(H_0^{(1)}(kr) \right)^*$ und der Annahme $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(r) &= \alpha H_0^{(1)} + \beta H_0^{(2)} \quad \text{für } k \neq 0 \\ f(r) &= \alpha \ln r + \beta \quad \text{für } k = 0 \end{aligned}$$

$n = 1$ erkennt man aus der Theorie der 1D Wellengleichung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx} \quad \text{für } k \neq 0 \\ f(x) &= c_1 x + c_2 \quad \text{für } k = 0 \end{aligned}$$

2.8.3 Green Funktion der Helmholtz-Gleichung

Zum Lösen der inhomogenen Schwingungsgleichung $(\Delta + k^2)U(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ greift man auf die Grundlösung $G(\vec{x})$, welche

$$\left(\Delta + k^2 \right) G(\vec{x}) = \delta(\vec{x}). \tag{2.46}$$

löst. Geht man in die Fourier-Darstellung, erhält man

$$\begin{aligned} G(\vec{x}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i \vec{q}\vec{x}} G(\vec{q}), \\ \delta(\vec{x}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i \vec{q}\vec{x}}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Einsetzen in (2.46) ergibt

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} (-q^2 + k^2) e^{i \vec{q} \vec{x}} G(\vec{q}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i \vec{q} \vec{x}},$$
$$G(\vec{q}) = \frac{1}{k^2 + q^2}.$$

Setzt man $G(\vec{q})$ in (2.47) ein erhält man

$$G(\vec{x}) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i \vec{q} \vec{x}}}{k^2 - q^2}.$$

Nun geht man über in die Kugelkoordinaten und wählt das Koordinatensystem von \vec{q} so, dass

$$\begin{aligned} \angle(\vec{x}, \vec{q}) &= \Theta, \\ q_x &= q \sin \Theta \cos \varphi, \\ q_y &= q \sin \Theta \sin \varphi, \\ q_z &= q \cos \Theta, \\ |\vec{x}| &= r, \\ \vec{q} \cdot \vec{x} &= q \cdot r \cdot \cos \Theta. \end{aligned}$$

gilt. Somit ergibt sich nun für $G(\vec{x})$

$$\begin{aligned} G(\vec{x}) &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i \vec{q} \vec{x}}}{q^2 - k^2} \\ &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i q r \cos \Theta}}{q^2 - k^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\Theta \int_0^\infty dq q^2 \sin \Theta \frac{e^{i q r \cos \Theta}}{k^2 - q^2}. \end{aligned}$$

Für $G(\vec{x})$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
 G(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dx \int_0^\infty dq \, q^2 \frac{e^{iqr x}}{k^2 - q^2} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2 ir} \int_0^\infty dq \, q \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{k^2 - q^2} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 ir} \left[\int_0^\infty dq \frac{qe^{iqr}}{k^2 - q^2} - \underbrace{\int_0^\infty dq \frac{qe^{-iqr}}{k^2 - q^2}}_{q \rightarrow -q} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 ir} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{qe^{iqr}}{k^2 - q^2}, \\
 G(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi^2 ir} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{qe^{iqr}}{(q+k)(q-k)}
 \end{aligned}$$

hat Pole $\pm k$ auf der reellen Achse. Diese müssen infinitesimal verschoben werden.

Zwei Möglichkeiten

Hierfür schreibt man $G(\vec{x})$ so um, das gilt

$$G_{\pm}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi^2 ir} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{qe^{iqr}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon}.$$

Beschränkt man sich nur auf $G_+(\vec{x})$ ergeben sich neue Pole bei $q^2 = k^2 + i\epsilon$ mit

$$q = \pm \sqrt{k^2 + i\epsilon} = \pm \left(k + \frac{i\epsilon}{k} \pm \dots \right).$$

Der Integrationsweg erfolgt über den Residuensatz und hat die Lösung

$$G_+(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.48)$$

Gleichermaßen wird für $G_-(\vec{x})$ vorgegangen mit der Lösung

$$G_-(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.49)$$

$G_+(\vec{x})$ heißt RETARDIERTE GREEN-FUNKTION, was einer auslaufenden Kugelwelle entspricht. Die AVANCIERTE GREEN-FUNKTION $G_-(\vec{x})$ entspricht einer einlaufenden Kugelwelle.

2.8.4 Die erste Greensche Formel

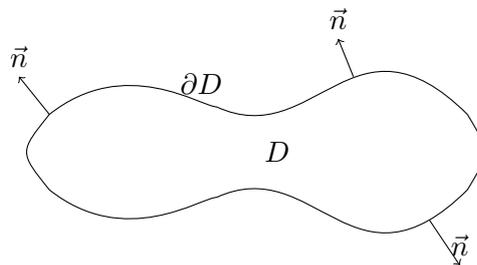
Literaturempfehlung [8], für mathematische Grundlagen siehe Anhang.

Es wird der Divergenzsatz (Satz von Gauss) im Dreidimensionalen angewandt

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{F} \, d^3x = \iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS, \quad (2.50)$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

mit $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ als ein Vektorfeld. D ist ein beschränkter Körper, $S = \partial D$ die Randfläche des Körpers D , \vec{n} die äußere Einheitsnormale von ∂D und dS das Oberflächenelement.



Die 1. Greensche Formel

Aus der Produktregel

$$(vu_x)_x = v_x u_x + vu_{xx}$$

und den entsprechenden Gleichungen für y und z folgt aus der Summation der drei Gleichungen

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = (\nabla v)(\nabla u) + v \Delta u.$$

Durch Integration dieser Gleichung und Anwendung von (2.50) auf die linke Seite erhält man

$$\iint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \iiint_D (\nabla v)(\nabla u) \, d\vec{x} + \iiint_D v \Delta u \, d\vec{x} \quad (2.51)$$

welche 1. GREENSCHE FORMEL heißt mit $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla u$ was der Richtungsableitung in Richtung der äußeren Normalen entspricht. Sie ist für jeden Körper D und jedes Paar von Funktionen u und v gültig. Für $v \equiv 1$ reduziert sich die 1. Greensche Formel auf

$$\iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = \iiint_D \Delta u \, d\vec{x}. \quad (2.52)$$

Im Folgenden wird das Neumann-Problem auf einem beliebigen Bereich D mit

$$D \begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h(x) & \text{auf } \partial D \end{cases}$$

betrachtet. Nach (2.52) gilt

$$\iint_{\partial D} h \, dS = \iiint_D f \, d\vec{x}. \quad (2.53)$$

Das Neumann-Problem ist nur korrekt gestellt, falls die Vorgaben h und f nicht beliebig sind und somit die am Anfang gegebene Bedingung für D erfüllt ist. Ansonsten existiert keine Lösung. In diesem Fall ist das Neumann-Problem nicht richtig gestellt.

Ebenfalls kann man eine Konstante auf die Lösung hinzu addieren und man erhält eine weitere Lösung.

Man kann somit über das gegebene Problem keine genaue Existenz- und Eindeutigkeitsaussage machen.

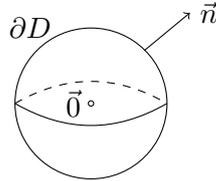
Die Mittelwerteigenschaft

In drei Dimensionen bedeutet die Mittelwerteigenschaft, dass der Mittelwert der Funktionswerte auf der Einheitssphäre einer jeden harmonischen Funktion übereinstimmt mit dem Funktionswert im Kugelmittelpunkt.

Beweis: D sei die Kugel

$$\begin{aligned} \{|\vec{x}| < a\} &= \{x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}, \\ \partial D &= \{|\vec{x}| = a\}. \end{aligned}$$

Sei $\Delta u = 0$ (harmonische Funktion) in einem Gebiet welches D und ∂D enthält. Der äußere Normalenvektor \vec{n} zeigt vom Ursprung weg, so dass



$$\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla u = \frac{\vec{x}}{r} \nabla u = \frac{x}{r} u_x + \frac{y}{r} u_y + \frac{z}{r} u_z = \frac{\partial u}{\partial r}$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{x}|$ die sphärische Koordinate, der Abstand des Punktes (x, y, z) zum Kugelmittelpunkt, ist. Aus (2.52) folgt

$$\iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial r} dS = 0.$$

Schreibt man dies in sphärische (r, Θ, ϕ) Koordinaten um, gilt

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_r(a, \Theta, \phi) a^2 \sin \Theta \, d\Theta \, d\phi = 0, \quad (2.54)$$

2 Partielle Differentialgleichungen

da $r = a$ auf ∂D . Als nächstes wird die Gleichung (2.54) durch $4\pi a^2$ dividiert, also die Fläche von ∂D . Das Ergebnis gilt für alle $a > 0$, weshalb man sich a als Variable vorstellen kann. Nun wird die Ableitung $\frac{\partial}{\partial r}$ vor das Integral gezogen und erhält

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \Theta, \phi) \sin \Theta d\Theta d\phi \right]_{r=0} = 0.$$

Dabei ist $\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \Theta, \phi) \sin \Theta d\Theta d\phi$ unabhängig von r . Dieser Ausdruck ist genau der Mittelwert von u auf der Kugel. Mit $r \rightarrow 0$ gilt für die Klammer

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(0) \sin \Theta d\Theta d\phi = u(0),$$

woraus folgt

$$u(0) = \frac{1}{\text{Fläche von } S} \iint_S u dS$$

womit die Mittelwerteigenschaft in drei Dimensionen gezeigt wurde.

Das Maximumprinzip

Ist D ein dreidimensionaler Bereich, so wird das Maximum einer in D harmonischen Funktion nicht im Inneren von D , sondern nur auf ∂D angenommen, mit $u(\vec{x}) = \text{konst.}$

2.8.5 Die zweite Greensche Formel

Der mittlere Term von (2.51) ändert sich hier nicht, wenn man u und v vertauscht. Wenn man (2.51) für das Funktionenpaar u, v und für das Paar v, u schreibt und die beiden von einander subtrahiert, erhält man

$$\iiint_D (u\Delta v - v\Delta u) d\vec{x} = \iint_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS. \quad (2.55)$$

Diese Gleichung heißt ZWEITE GREENSCHE FORMEL. Auch sie gilt für jedes Funktionenpaar u und v . Sie führt auch zu folgender Definition.

Definition: Eine Randbedingung heißt SYMMETRISCH für den Operator Δ , wenn die rechte Seite von (2.55) für jedes Funktionenpaar u und v , das die Randbedingung erfüllt, verschwindet. Jede der klassischen Randbedingungen (Dirichlet, Neumann) ist symmetrisch.

Eine Darstellungsformel für harmonische Funktionen

Durch diese Formel wird jede harmonische Funktion durch ein Randintegral ausgedrückt.

Ist $\Delta u = 0$ in D , so gilt für jeden Punkt $\vec{x}_0 \in D$

$$u(\vec{x}_0) = \iint_{\partial D} \left[-u(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right) + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \frac{dS}{4\pi}. \quad (2.56)$$

Beweis: Gleichung (2.56) ist ein Spezialfall von Gleichung (2.47) mit $v(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}_0|}$. Es bleibt zu zeigen, dass $u(\vec{x}_0) = \int \int \int_D (u \nabla v) f \vec{x}$ gilt.

Aus Abschnitt 2.8.3, Gleichung (2.46) und (2.48) im Limes $k \rightarrow 0$, folgt

$$\begin{aligned} \Delta v(\vec{x}) &= \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), \\ \iiint_D u(\vec{x}) \Delta v(\vec{x}) d^3x &= \iiint_D u(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) d^3x = u(\vec{x}_0). \end{aligned}$$

2.8.6 Ganzraumprobleme der inhomogenen Helmholtz-Gleichung

In diesem Abschnitt wird sich mit der INHOMOGENEN HELMHOLTZ-GLEICHUNG

$$\nabla u + k^2 u = \rho(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.57)$$

beschäftigt.

Satz: Es sei D ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) mit glatter Randfläche ∂D und ρ eine in D stetig differenzierbare Funktion. Dann ist

$$u(\vec{x}) = - \int_D \rho(\vec{y}) G_{\pm}(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y}$$

eine Lösung der Gleichung (2.57), wobei G_{\pm} eine der beiden Grundlösungen der Helmholtz-Gleichung ist. Speziell für $n = 3$ gilt

$$u(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \rho(\vec{y}) \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (\nabla + k^2)u(\vec{x}) &= \iiint_D \rho(\vec{y}) \left[(\nabla + k^2)G_{\pm}(\vec{x} - \vec{y}) \right] d\vec{y} \\ &= \iiint_D \rho(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} \\ &= \rho(\vec{x}) \end{aligned}$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Beispiel: (für $k = 0$ aus der Elektrostatik)

Die Poisson-Gleichung

$$\Delta u = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

wird durch das bekannte Coulomb-Potential

$$U(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}$$

gelöst.

2.8.7 Randwertprobleme im \mathbb{R}^3

2.8.7.1 Klassifizierung

D_i sei ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit glatter Randfläche ∂D . D_a bezeichne das Äußere des Gebiets D_i . Bei Innenraumproblemen suchen wir nach Lösungen U der Helmholtz-Gleichung in D_i , bei Außenraumproblemen in D_a . Es wird unterschieden zwischen

- Dirichlet Randwertproblem:

$$U(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$$

für $\vec{x} \in \partial D$.

- Neumann Randwertproblem:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \Psi(\vec{x})$$

für $\vec{x} \in \partial D$.

- gemischtes Randwertproblem:

$$\frac{\partial U}{\partial n}(\vec{x}) + hU(\vec{x}) = \chi(\vec{x})$$

für $\vec{x} \in \partial D$.

2.8.7.2 Lösung von Randwertproblemen mittels Greenschen Funktion

Das Ziel ist das Lösen der inhomogenen Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)U(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in D.$$

Das Problem hängt von der Geometrie, der Inhomogenität ρ und den Werten von U auf ∂D ab. Es wird die Grundlösung $\Phi_1(\vec{x}, \vec{y})$ definiert, die die Gleichung

$$(\Delta_{\vec{x}} + k^2)\Phi_1(\vec{x}, \vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.58)$$

erfüllt. Um die Aufgabe zu vereinfachen, wird die Greensche Funktion verwendet

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi_1(\vec{x}, \vec{y}) + \underbrace{F(\vec{x}, \vec{y})}_{\text{Flexibilität}},$$

wobei F der homogenen Gleichung

$$(\Delta_x + k^2)F(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \quad \text{mit } \vec{y} \in \partial D \quad (2.59)$$

genügt. $\Phi_1(\vec{x}, \vec{y})$ ist die Grundlösung des Raumes \mathbb{R}^3 . $F(\vec{x}, \vec{y})$ passt die Greensche Funktion an das jeweilige Randwertproblem und damit an das jeweilige Gebiet D an. Aus (2.58) und (2.59) folgt die Symmetrie von $G(\vec{x}, \vec{y})$

$$\begin{aligned} (\Delta_{\vec{x}} + k^2)G(\vec{x}, \vec{y}) &= -\delta(\vec{x}, \vec{y}), \\ G(\vec{x}, \vec{y}) &= G(\vec{x} - \vec{y}) = G(\vec{y} - \vec{x}) = G(\vec{y}, \vec{x}). \end{aligned}$$

Aus der 2. Greenschen Formel (2.55) folgt mit $u \hat{=} U(\vec{x})$ und $v \hat{=} G(\vec{x}, \vec{y})$

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial D} \left[U(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) - G(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} U(\vec{y}) \right] dS_y \\ &= \iiint_D \left[U(\vec{y}) \underbrace{(\Delta_{\vec{y}} + k^2)G(\vec{x}, \vec{y})}_{=\delta(\vec{x}-\vec{y})} - G(\vec{x}, \vec{y}) \underbrace{(\Delta_{\vec{y}} + k^2)U(\vec{y})}_{=\rho(\vec{y})} \right] dV_y \\ &= \iiint_D [U(\vec{y})\delta(\vec{x}, \vec{y}) - G(\vec{x}, \vec{y})\rho(\vec{y})] dV_y \\ &= U(\vec{x}) - \iiint_D G(\vec{x}, \vec{y})\rho(\vec{y}) dV_y \end{aligned}$$

Damit berechnet sich $U(\vec{x})$ aus seinen Quellen ρ in D und aus seinen Randwerten. Somit erhält man die Lösung des Randwertproblems der inhomogenen Gleichung

$$U(\vec{x}) = \iiint_D G(\vec{x}, \vec{y})\rho(\vec{y}) dV_y + \iint_{\partial D} U(\vec{y}) \frac{\partial G}{\partial n_y}(\vec{x}, \vec{y}) dS_y - \iint_{\partial D} G(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial U}{\partial n_y}(\vec{y}) dS_y. \quad (2.60)$$

Zum Dirichlet-Problem

Gefordert wird

$$U(\vec{y}) = \varphi(\vec{y}) \quad \text{für } \vec{y} \in \partial D.$$

Es wird $F(\vec{x}, \vec{y})$ so gewählt, dass $G(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ für $\vec{y} \in \partial D$. G wird dann als $G_D(\vec{x}, \vec{y})$ geschrieben. Aus (2.60) folgt

$$U(\vec{x}) = \int_D G_D(\vec{x}, \vec{y})\rho(\vec{y}) dV_y + \int_{\partial D} \varphi(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G_D(\vec{x}, \vec{y}) dS_y. \quad (2.61)$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Zum Neumann-Problem

Hierfür wird gefordert, dass

$$\frac{\partial U}{\partial n}(\vec{y}) = \psi(\vec{y}) \quad \text{auf } \vec{y} \in \partial D.$$

F wird so gewählt, dass G auf ∂D konstant ist

$$\frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{A}.$$

A entspricht dem Flächeninhalt von ∂D . Aus (2.60) folgt somit

$$U(\vec{x}) = \iiint_D G_N(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) dV_y - \iint_{\partial D} G_N(\vec{x}, \vec{y}) \psi(\vec{y}) dS_y + U_0,$$

$$U_0 = \frac{1}{S} \iint_{\partial D} U(\vec{y}) dS_y.$$

Unter gewissen physikalischen Umständen lässt sich $S \rightarrow \infty$ schicken, so dass U_0 verschwindet, siehe [6, S.47].

Physikalische Interpretation

$-\Phi_1(\vec{x}, (y_1, y_2 - y_3))$ entspricht hier dem Beitrag einer Ladung $-q$ am Ort $(x_1, x_2, -x_3)$ der Spiegelung von $+q$ am Ort (x_1, x_2, x_3) .

$$G_D = q \cdot (\Phi_1(\vec{x}, (y_1, y_2, y_3)) - q \cdot \Phi_1(\vec{x}, (y_1, y_2 - y_3)))$$

$$(\Delta + k^2)G = -q\delta(\vec{x} - \vec{y}_+) + q\delta(\vec{x} - \vec{y}_-) \hat{=} \rho(\vec{x})$$

Bei einer punktförmigen Ladung gilt

$$\rho_+(\vec{x}) = -q\delta(\vec{x} - \vec{y}_+),$$

$$\rho_-(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{y}_-),$$

$$\int_V d\vec{x} \rho_-(\vec{x}) = q.$$

Eine Punktladung gegenüber einer geerdeten, leitenden Kugel wird durch folgende Greensche Funktion beschrieben

$$G_D(\vec{x}, \vec{y}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\underbrace{\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}}_q - \underbrace{\frac{R}{|\vec{y}|} \frac{1}{|\vec{x} - \frac{R^2}{y} \vec{y}|}}_{q'} \right).$$

Die Lösung ergibt sich direkter mit der Symmetrie als Input

$$\Phi(|\vec{x}| = R) = 0,$$

$$\Phi(\vec{x}) \hat{=} U(\vec{x}).$$

Mittels des Ansatzes

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \underbrace{\vec{y}}_{\text{au\ss}erhalb}|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}' - \underbrace{\vec{y}'}_{\text{innerhalb}}|}.$$

q' und \vec{y}' wird so gew\u00e4hlt, dass $\Phi(|\vec{x}| = R) = 0$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\underbrace{|x\hat{n} - y\hat{n}'|}_{=\frac{1}{x|\hat{n} - \frac{y}{x}\hat{n}'|}}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\underbrace{|x\hat{n} - y'\hat{n}'|}_{=\frac{1}{y'|\hat{n}' - \frac{x}{y'}\hat{n}|}}}$$

wobei \hat{n} dem Einheitsvektor in \vec{x} -Richtung mit $\vec{x} = x\hat{n}$ entspricht und \hat{n}' dem Einheitsvektor in \vec{y} - bzw. \vec{y}' -Richtung.

$$\Phi(x = R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R|\hat{n} - \frac{y}{x}\hat{n}'|} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y'|\hat{n}' - \frac{R}{y'}\hat{n}|} \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies ist f\u00fcr

$$\begin{aligned} \frac{q}{R} &= -\frac{q'}{y'} \quad \text{und} \quad \frac{y}{R} = \frac{R}{y'} \\ q' &= -\frac{y'}{R}q = -\frac{R}{y}q \\ y' &= \frac{R^2}{y} \end{aligned}$$

erf\u00fcllt. Literatur: Green Funktion und Anwendung in ED; [6]

2.8.8 Separationsl\u00f6sungen der Helmholtzgleichung

Auch bei der Helmholtzgleichung erlaubt es die Methode der Trennung der Variablen, zu einfacheren DGL zu gelangen. Es wird das Dirichlet-Problem

$$(\Delta + k^2)U(\vec{x}) = 0$$

in D mit $U(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$ auf ∂D behandelt. Welche Koordinaten verwendet werden, h\u00e4ngt von der Geometrie des Problems ab.

Kartesische Koordinaten

Handelt es sich bei D etwa um einen Quader im \mathbb{R}^3 , so w\u00e4hlt man nat\u00fcrlich kartesische Koordinaten (x, y, z) . Die DGL lautet somit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) U(\vec{x}) = 0$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Mit dem Separationsansatz $U(\vec{x}) = X(x)Y(y)Z(z)$ folgt nach Division durch XYZ

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0. \quad (2.62)$$

Da die Summanden konstant sein müssen, erhält man drei gewöhnliche DGL

$$\frac{X''}{X} + k_1^2 = 0, \quad \frac{Y''}{Y} + k_2^2 = 0, \quad \frac{Z''}{Z} + k_3^2 = 0, \quad (2.63)$$

wobei offenbar gilt

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2.$$

Die Lösungen sind vom Typ

$$\begin{aligned} X(x) &= a_1 \sin(k_1 x) + a_2 \cos(k_1 x), \\ Y(y) &= b_1 \sin(k_2 y) + b_2 \cos(k_2 y), \\ Z(z) &= c_1 \sin(k_3 z) + b_3 \cos(k_3 z). \end{aligned}$$

Die Randbedingungen auf den Wänden des Quaders liefern die Bedingungen für die $a_1, \dots, c_2, k_1, k_2, k_3$. Mit der zusätzlichen Annahme, dass $\varphi(\vec{x}) = 0$ ist, folgt

$$k_1 = \frac{n\pi}{l_1}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{l_2}, \quad k_3 = \frac{n\pi}{l_3}.$$

Schwingung einer kreisförmigen Membran

Für die Schwingungsamplitude einer kreisförmigen Membran mit dem Radius R gilt die Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.64)$$

Die Membran sei am Rand kreisförmig eingespannt $U(R, \varphi) = 0$. Ebenfalls muss $U(r, \varphi + 2\pi) = U(r, \varphi)$ erfüllt sein. Der Separationsansatz $U(r, \varphi) = V(r) \cdot \Phi(\varphi)$ führt zu

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)}{V} + \underbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}_{\equiv -\nu^2} + k^2 r^2 = 0.$$

Für Φ ergibt sich die gewöhnliche DGL

$$\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0$$

mit der Lösung

$$\Phi = C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit $\nu = n \in \mathbb{N}_0$ damit $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ erfüllt ist. Die gewöhnliche DGL für V lautet dann

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) - \frac{n^2}{r} V + k^2 r V = 0, \quad V(R) = 0. \quad (2.65)$$

Mit der Substitution $\rho = kr$ erhält man mit $Z(\rho) = V(kr)$

$$Z''(\rho) + \frac{1}{\rho}Z'(\rho) + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)Z(\rho) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.66)$$

Dies ist eine Besselsche DGL mit Index n mit der allgemeinen Lösung

$$V_n(r) = A_n J_n(kr) + B_n N_n(kr)$$

mit der am Ursprung regulären BESSEL-FUNKTION $J_n(kr)$ und der am Ursprung singulären NEUMANN-FUNKTION $N_n(kr)$. Da wir uns für Lösungen für $0 \leq r \leq R$ interessieren, muss $B = 0$ sein

$$V_n(r) = A_n J_n(kr).$$

Wird noch die Randbedingung $V(R) = 0$ berücksichtigt, erhält man

$$J_n(kR) = 0.$$

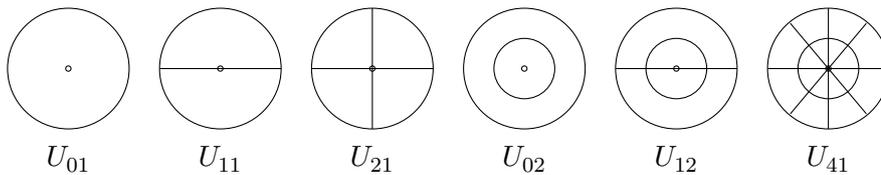
ω_{nm} ($m \in \mathbb{N}$) sei die m -te Nullstelle der Bessel-Funktion J_n , so erfüllt k die Bedingung

$$k = \frac{\omega_{nm}}{R}.$$

Man erhält folgende Eigenschwingungen des homogenen Randwertproblems

$$U(r, \varphi) = \sum_{n,m} \underbrace{J_n\left(\omega_{nm} \frac{r}{R}\right) (c_{nm} \cos(n\varphi) + d_{nm} \sin(n\varphi))}_{U_{nm}}.$$

Beispiel: Im folgenden werden nun einige spezielle Eigenschwingungen betrachtet. Diese treten nur unter besonderen Anfangsbedingungen auf. n ist die Zahl der Knoten im Azimuthwinkel φ , für $n = 0$ gibt es also keinen Winkel, bei dem die Membran in Ruhe bleibt. Je nachdem, wie die Membran angeschlagen wird, ergeben sich Bereiche, in denen die Membran Knoten aufweist.



Kugelsymmetrische Probleme

Die Helmholtz-Gleichung in Kugelkoordinaten lautet

$$\underbrace{\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right]}_{\Delta} U(r, \vartheta, \varphi) = 0. \quad (2.67)$$

Der Separationsansatz $U(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi)$ führt zu

$$\frac{(r^2 R')'}{R} + \underbrace{\frac{\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y}{Y}}_{-\mu} + k^2 r^2 = 0.$$

Die Gleichung für $Y(\vartheta, \varphi)$

$$\left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \mu \right] Y(\vartheta, \varphi) = 0 \quad (2.68)$$

vereinfacht man durch eine weitere Trennung der Variablen $Y(\vartheta, \varphi) = \theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$

$$\sin \vartheta \frac{\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot \theta'(\vartheta))}{\theta(\vartheta)} + \mu \sin^2 \vartheta + \underbrace{\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}}_{\equiv -\nu^2} = 0.$$

Die Lösung von

$$\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0 \quad (2.69)$$

ist somit

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = \nu \in \mathbb{Z}.$$

Die Einschränkung auf $m \in \mathbb{Z}$ ist wegen $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ erforderlich. Die Gleichung für $\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} (\sin \vartheta \cdot \theta')' + \left(\mu - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \theta(\vartheta) = 0 \quad (2.70)$$

wird mittels $P(x = \cos \theta) = \Theta(\theta)$ umgeformt. Aus

$$\frac{d}{d\vartheta} = \frac{dx}{d\vartheta} \frac{d}{dx} = -\sin \vartheta \frac{d}{dx}$$

folgt für (2.70)

$$\left((1-x^2) P' \right)' - \frac{m^2}{1-x^2} P + \mu P = 0, \quad +x \in [-1, +1], \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Diese Gleichung hat singuläre Punkte bei $x = \pm 1$. Wir erhalten aber selbst für $x = \pm 1$ reguläre Lösungen, wenn $\mu = l(l+1)$ und $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$, $l \in \mathbb{N}_0$. Hieraus erhält man die verallgemeinerte Legendre-Gleichung

$$\left((1-x^2) P'_{l,m} \right)' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_{l,m} = 0. \quad (2.71)$$

Speziell für $m = 0$ ist dies die Legendre-DGL

$$\left((1-x^2) P'_l \right)' + l(l+1) P_l = 0. \quad (2.72)$$

Die bei $x = \pm 1$ beschränkte Lösung $P_l(x)$ der Legendre DGL heißt **LEGENDRE-POLYNOM**

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2l-2k)! x^{l-2k}}{(l-2k)! (l-k)! k!}, \quad P_l(1) = 1. \quad (2.73)$$

mit

$$\frac{l}{2} = \begin{cases} \frac{l}{2} & , l \text{ gerade} \\ \frac{l-1}{2} & , l \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Für $m \neq 0$ heißen die bei $x = \pm 1$ beschränkten Lösungen $P_l^m(x)$ der verallgemeinerten Legendre-Gleichung **ASSOZIIERTE LEGENDRE-POLYNOME**

$$P_{l,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \{0, 1, \dots, l\}$$

und

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x).$$

Für die Orthogonalität gilt

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{1}{1} \delta_{ll'}.$$

Formel von Rodriguez

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (2.74)$$

also

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \end{aligned}$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Es gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}.$$

Legendre-Polynome bilden einen vollständigen Satz orthogonaler Funktionen. Daraus folgt, dass jede Funktion $f(x)$ für $x \in [-1, 1]$ nach den $P_l(x)$ entwickelt werden kann.

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$$

mit Koeffizienten

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_l(x)dx.$$

Beispiel:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & , \text{für } x \leq 0 \\ -1 & , \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist somit die Vorzeichenfunktion.

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \left[\int_0^1 P_l(x) dx - \int_{-1}^0 P_l(x) dx \right].$$

$P_l(x)$ ist für $\begin{cases} \text{ungerades} \\ \text{gerades} \end{cases} l$ eine $\begin{cases} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{cases}$ Funktion von x .

$$A_l = \begin{cases} (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx & , l \text{ ungerade} \\ 0 & , l \text{ gerade} \end{cases}$$

Die Auswertung mithilfe von (2.74) ergibt

$$A_l = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(2l+1)(l-2)!}{2 \left(\frac{l+1}{2}\right)!},$$

$$f(x) = \frac{3}{2}P_1(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + \frac{11}{16}P_5(x) \pm \dots$$

Definition: Die Funktionen

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (2.75)$$

mit $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ heißen KUGELFLÄCHEN-FUNKTION. Sie lösen die Eigenwertgleichung

$$\left[\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right] Y_l^m(\vartheta, \varphi) = -l(l+1)Y_l^m(\vartheta, \varphi).$$

Beispiel:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$$

Orthogonalität:

$$\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta (Y_l^m(\vartheta, \varphi))^* Y_{l'}^{m'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Vollständigkeit:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (Y_l^m(\vartheta', \varphi'))^* Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \frac{\delta(\vartheta - \vartheta')}{\sin \vartheta} \delta(\varphi - \varphi') = \delta(\Omega - \Omega')$$

Atomphysik: *s*- und *p*-Orbitale

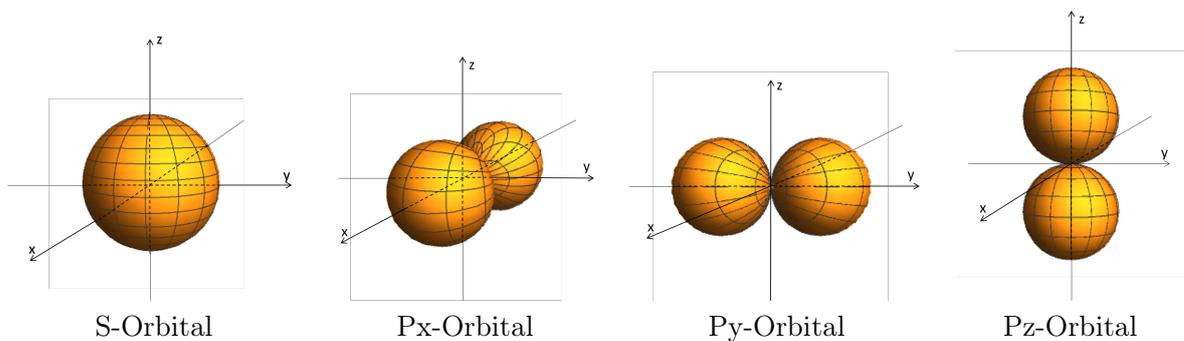
$$s = Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$p_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^1 - Y_1^{-1}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \cos \varphi \quad (\text{x in Kugelkoordinaten})$$

$$p_y = -\frac{1}{\sqrt{2}i} (Y_1^1 - Y_1^{-1}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \vartheta \sin \varphi \quad (\text{y in Kugelkoordinaten})$$

$$p_z = Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta \quad (\text{z in Kugelkoordinaten})$$

Graphische Veranschaulichung:



2 Partielle Differentialgleichungen

Die Radialgleichung (resultierend aus der sphärischen Helmholtz-Gl.)

Wird berücksichtigt, dass $\mu = l(l+1)$, folgt daraus

$$\left(r^2 R'\right)' + \left(k^2 r^2 - l(l+1)\right) R = 0, \quad \text{mit } l \in \mathbb{N}_0 \quad (2.76)$$

Für $k = 0$ lautet die bei $r = 0$ reguläre Lösung der Radialgleichung

$$R(r) = ar^l, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Die bei $r = 0$ singuläre Lösung lautet

$$R(r) = br^{-(l+1)}.$$

Für $k \neq 0$ lässt sich diese Gleichung mit der Substitution $y(x) = \sqrt{x}R(x)$ mit $x = kr$ zur Besselschen DGL

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left[1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{x^2}\right]y(x) = 0 \quad (2.77)$$

umformen. Mit der SPHÄRISCHEN BESSELFUNKTION

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

lautet die bei $r = 0$ reguläre Fundamentallösung $R(r) = j_l(kr)$. Ihr bei $r = 0$ singuläres Pendant ist die SPHÄRISCHE NEUMANNFUNKTION

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x).$$

Für reelle x gilt

$$j_l(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\sin x}{x}\right) \quad \text{und} \quad n_l(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\cos x}{x}\right).$$

Die allgemeine sphärische Lösung lässt sich schreiben als

$$U(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm} j_l(kr) + B_{lm} n_l(kr)) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad \text{mit } A_{lm}, B_{lm} \in \mathbb{R}. \quad (2.78)$$

Problemstellung eines Randwertproblems

Gesucht ist die Lösung $U(r, \vartheta, \varphi)$ für $0 \leq r < R$ mit der Randbedingung

$$U(r = R, \vartheta, \varphi) = 0. \tag{2.79}$$

1. $n_l(kr)$ ist bei $r = 0$ singularär. Daraus folgt $B_{lm} = 0, \forall l, m$.
2. χ_{nl} sei die n -te Nullstelle von $j_l : j_l(\chi_{nl}) = 0$. Daraus folgt, dass $j_l(\chi_{nl} \frac{r}{R})$ (2.76) löst, mit der Randbedingung (2.79). $k = \frac{\chi_{nl}}{R}$ sind die Eigenwerte des Problems.
3. Allgemeine Lösung:

$$U(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{N_{nlm} j_l\left(\chi_{nl} \frac{r}{R}\right) Y_l^m(\vartheta, \varphi)}_{\equiv U_{nlm}(r, \vartheta, \varphi)}$$

Für $l = 0$ sind dies nur rein radiale Eigenschwingungen

$$U_{n,0,0} = N_{n,0,0} \frac{\sin\left(\chi_{nl} \frac{r}{R}\right)}{\chi_{nl} \frac{r}{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

2.9 Parabolische Differentialgleichungen

Dieser Typus von DGL tritt bei Problemen auf, die mit Wärmeleitung und Diffusion zusammenhängen. Die Ereignisse aus der Theorie der Wärmeleitungsgleichung lassen sich unmittelbar auf die Diffusionsgleichung übertragen. Aber auch die Schrödinger-Gleichung der Quantentheorie ist von diesem Typ.

2.9.1 Die Wärmeleitungsgleichung

Siehe Kapitel 2.6 für den 1D Fall. Für den 3-dimensionalen Fall erhält man

$$T_t(\vec{x}, t) - a^2 \Delta T(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) \tag{2.80}$$

mit

- $a = \frac{k}{c\rho}$: Temperaturleitfähigkeit
- c : spezifische Wärmekapazität
- ρ : Massendichte
- k : Wärmeleitfähigkeit

$f = \frac{\Psi(\vec{x}, t)}{c\rho}$, mit $\Psi(\vec{x}, t)$:

Dichte der durch Wärmequellen (elektrische Ströme, chemische Reaktionen) zugeführten Wärme

Pro Zeiteinheit wird dem Volumenelement dV die Wärmemenge $dQ = \Psi(\vec{x}, t)dV$ zugeführt. In Gleichung (2.80) wurde angenommen, dass k, c, ρ konstant sind (dies entspricht einem homogenen Körper).

Analoge mathematische Struktur:

2 Partielle Differentialgleichungen

Diffusionsgleichung

Die Diffusionsgleichung

$$v_t(\vec{x}, t) - D\Delta v(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t)$$

ist analog aufgebaut mit

$v(\vec{x}, t)$: Konzentration

D : Diffusionskoeffizient

$g(\vec{x}, t)$: Maß für zugeführte Stoffmenge

Anfangsbedingung

Als Anfangsbedingung ist die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgebar. Eine zusätzliche Anfangsbedingung kann nicht gestellt werden.

Verschiedene Randbedingungen

- 1) CAUCHY-PROBLEM entspricht unendlichem Raum ohne Randbedingungen.
- 2) Unendlicher oder endlicher Bereich D mit Grenzfläche ∂D . Die Randbedingung lautet

$$-\frac{\partial T}{\partial n} = -\vec{n}\vec{\nabla}T = \kappa(\vec{x}, t) (T(\vec{x}, t) - \tau(\vec{x}, t)) , \quad \vec{x} \in \partial D.$$

- $\kappa(\vec{x}, t)$: Wärmeleitfähigkeit der Wand, welche das Innere und Äußere von D trennt
 $T(\vec{x}, t)$: Innentemperatur
 $\tau(\vec{x}, t)$: Außentemperatur
 \vec{n} : nach außen weisender Normalenvektor

Spezialfälle

- i $\kappa \rightarrow \infty$ Hier hat man es mit einer sehr gut leitenden Wand zu tun. Der Ausdruck $T - \tau$ verschwindet. Am Rand von D wird die Außentemperatur angenommen. In diesem Fall spricht man von der Randbedingung 1. Art (Dirichlet):

$$T(\vec{x}, t) = \tau(\vec{x}, t), \quad \text{für } \vec{x} \in \partial D.$$

- ii $\kappa \rightarrow 0$ Bei einer perfekten Isolierung liegt die Randbedingung 2. Art (Neumann) vor:

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\vec{x} \in \partial D} = 0.$$

2.9.2 Lösung der Wärmeleitungsgleichung

A Cauchy-Problem

Es wird von der inhomogenen Gleichung

$$T_t - a^2 \Delta T = f(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.81)$$

mit der homogenen Anfangsbedingung $T(\vec{x}, 0) = 0$ ausgegangen. Hierfür konstruiert man die Green Funktion zum Differentialoperator $\partial_t - a^2 \Delta$ mit der Bestimmungsgleichung

$$G_t - a^2 \Delta_x G = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \delta(t - t_0), \quad \text{mit } t_0 > 0.$$

Sei $U(\vec{x}, \vec{y}, t, t_0)$ bezüglich \vec{x}, t Lösung der homogenen Gleichung

$$U_t - a^2 \Delta U = 0$$

mit der Anfangsbedingung $U(t = t_0) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$. Dann ist

$$G(\vec{x}, \vec{y}, t, t_0) := \Theta(t - t_0) \Theta(t_0) U(\vec{x}, \vec{y}, t, t_0)$$

für $t_0 \geq 0$ die Green Funktion der Wärmeleitungsgleichung.

Beweis:

$$\begin{aligned} G_t - a^2 \Delta_x G &= \delta(t - t_0) U(\vec{x}, \vec{y}, t, t_0) + \Theta(t - t_0) \Theta(t_0) \underbrace{(U_t - a^2 \Delta U)}_{=0} \\ &= \delta(t - t_0) \Theta(t) U(\vec{x}, \vec{y}, t, t_0) \\ &= \delta(t - t_0) \delta^{(3)}(\vec{x}, \vec{y}), \quad \text{für } t_0 > 0. \end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung lautet somit

$$T_{in}(\vec{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} U(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) f(\vec{y}, \tau) dV_y d\tau.$$

Sie erfüllt die Anfangsbedingung $T_{in}(\vec{x}, 0) = 0$. Es bleibt $U(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)$ zu berechnen. Translationsinvarianz in Raum und positiver Zeit ergibt $U(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) = W(\vec{x} - \vec{y}, t - \tau)$. Somit erfüllt $W(\vec{x}, t)$

$$W_t - a^2 \Delta W = 0, \quad \text{mit } W(\vec{x}, 0) = \delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (2.82)$$

2 Partielle Differentialgleichungen

Fouriertransformation von $W(\vec{x}, t)$

$$\begin{aligned}
 W(\vec{x}, t) &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} A(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3k \\
 (2.82) \Rightarrow 0 &= W_t - a^2 \Delta W \\
 &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} (A_t + (ak)^2 A) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3k \quad \text{mit } k = |\vec{k}| \\
 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} A(\vec{k}, t) + (ak)^2 A(\vec{k}, t) = 0
 \end{aligned}$$

mit Lösung:

$$A(\vec{k}, t) = B(\vec{k}) a^{-a^2 k^2 t}$$

$B(\vec{k})$ wird durch die Anfangsbedingung $W(\vec{x}, 0) = \delta^{(3)}(\vec{x})$ bestimmt.

$$\begin{aligned}
 W(\vec{x}, 0) &= (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} A(\vec{k}, 0) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3k = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} B(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3k \\
 &= \delta^{(3)}(\vec{x}) \\
 \Rightarrow B(\vec{k}) &= 1
 \end{aligned}$$

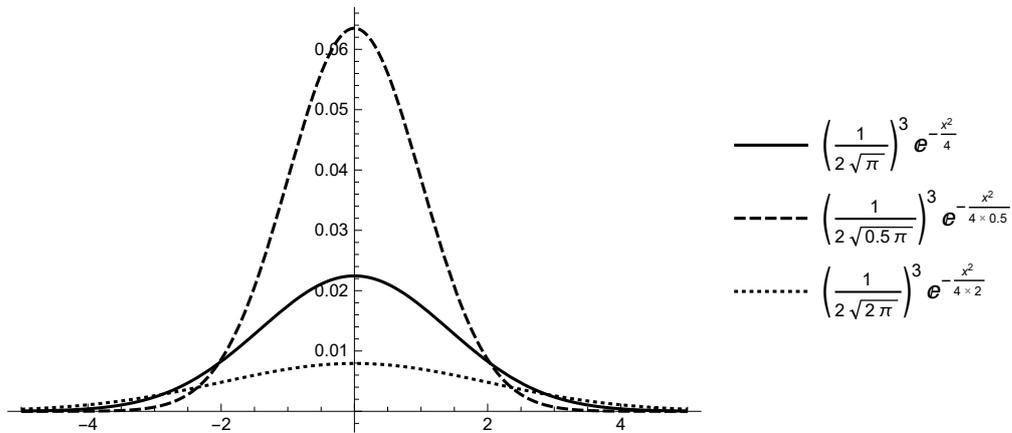
Jetzt können wir $W(\vec{x}, t)$ durch Rücktransformation berechnen:

$$W(\vec{x}, t) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-a^2 k^2 t} e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3k$$

Ziel ist die Transformation in ein Gauß'sches Integral durch quadratische Ergänzung im Exponenten

$$\begin{aligned}
 W(\vec{x}, t) &= (2\pi)^{-3} \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 k_j^2 t} e^{i k_j x_j} dk_j \\
 &= (2\pi)^{-3} \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t \left(k_j - i \frac{x_j}{2a^2 t}\right)^2 - \frac{x_j^2}{4a^2 t}} dk_j \\
 &= (2\pi)^{-3} \prod_{j=1}^3 \left[e^{-\frac{x_j^2}{4a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t k_j^2} dk_j \right] \\
 &= (2\pi)^{-3} \prod_{j=1}^3 \left[e^{-\frac{x_j^2}{4a^2 t}} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} \right] \\
 &= \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^3 e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}
 \end{aligned}$$

Interpretation



mit $a = 1$ $W(\vec{x}, t)$ beschreibt ein Gauß'sches Wellenpaket, welches sich mit wachsendem t verbreitert. Dies entspricht einem Temperaturverhalten nach dem Wirken einer Wärmequelle im Ursprung zur Zeit t .

$$U(\vec{x}, \vec{y}, t, t_0) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}} \right)^3 e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

und damit

$$T_{in}(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \right)^3 \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\vec{y}, \tau) dV_y d\tau \quad (2.83)$$

Alternatives Problem mit ähnlicher Mathematik

Ausgangspunkt ist die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$T_t - a^2 \Delta T = 0 \quad , \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

mit inhomogener Anfangsbedingung $T(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x})$. Es wird nun behauptet, dass die Lösung lautet

$$T_{hom}(\vec{x}, t) = \int U(\vec{x}, \vec{y}, t, 0) \varphi(\vec{y}) dV_y$$

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{hom} - a \Delta T_{hom} = \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{(U_t - \Delta_x U)}_{=0} \varphi(\vec{y}) dV_y = 0$$

2 Partielle Differentialgleichungen

mit Anfangsbedingung:

$$T_{hom} = \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{U(\vec{x}, \vec{y}, 0, 0)}_{=\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})} \varphi(\vec{y}) dV_y = \varphi(\vec{x})$$

$$T_{hom}(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{4a^2 t}} \varphi(\vec{y}) dV_y \quad (2.84)$$

Die Superposition von T_{in} (2.83) und T_{hom} (2.84)

$$T = T_{in} + T_{hom}$$

löst das allgemeine Cauchy-Problem:

$$T_t - a^2 \Delta t = f(\vec{x}, t) \quad \text{mit AB} \quad T(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}).$$

Beispiel: Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen

$$i\hbar \partial_t \Psi(\vec{x}, t) + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{mit AB} \quad \Psi(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x})$$

Daraus erhält man das Wellenpaket, das sich im Laufe der Zeit verbreitert

$$\Psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{\hbar}{2m}\pi t}} \right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{4\hbar t} - 2m} \varphi(\vec{y}) dV_y$$

Wärmeleitung in beschränkten Gebieten

Problemstellung:

$$T_t - a^2 \Delta T = 0 \quad (2.85)$$

- a) homogene Gleichung mit homogener Lösung
 mit Anfangsbedingung: $T(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x})$ für $\vec{x} \in D$
 und Randbedingung: $T(\vec{x}, t) = 0$ für $\vec{x} \in \partial D$
 Ansatz:

$$T(\vec{x}, t) = X(\vec{x}) \cdot \Theta(t)$$

$$(2.79) \Rightarrow \frac{\dot{\Theta}}{\Theta} = a^2 \underbrace{\frac{\Delta X}{X}}_{\equiv -\lambda}$$

Neue Differentialgleichungen:

$$\Delta X + \lambda X = 0 \quad \text{für } \vec{x} \in D \quad (2.86)$$

mit Randbedingung: $X \equiv 0$ auf ∂D .

$$\dot{\Theta} + a^2 \lambda \Theta = 0 \quad (2.87)$$

Gleichung (2.86) hat eine ähnliche Struktur wie die Helmholtz-Gleichung für ein beschränktes Gebiet D mit Rand ∂D .

Satz: (ohne Beweis):

Es sei D ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^3 mit glatter Randfläche ∂D . Zum Eigenwert-Problem

$$\Delta X + \lambda X = 0$$

in D mit $X \equiv 0$ auf ∂D gibt es eine positive wachsende Folge $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ und ein zugehöriges unendliches vollständiges Orthonormalsystem $\{X_n\}$ von Eigenfunktionen.²

Wir wissen bereits: Gleichung (2.87) hat die Lösung

$$\Theta_n(t) = A_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

falls $\lambda = \lambda_n$. Die allgemeine Lösung von (2.79) lautet

$$T_{hom}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(\vec{x}) e^{-a^2 \lambda_n t}$$

Mit der Anfangsbedingung

$$T_{hom}(\vec{x}, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(\vec{x}) \stackrel{!}{=} \varphi(\vec{x})$$

Bestimmung der A_n 's:

$$A_n = \int_D X_n(\vec{y}) \varphi(\vec{y}) dV_y$$

- b) Inhomogene Gleichung mit homogenen Randbedingung
 Problemstellung:

$$T_t - a^2 \Delta T = f(\vec{x}, t) \quad \text{in } D$$

mit $T(\vec{x}, 0) \equiv 0$ in D und $T(\vec{x}, t) \equiv 0$ auf ∂D .

Green Funktion für $t \geq 0$:

$$G(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau) = \Theta(t - \tau) \Theta(\tau) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\vec{x}) X_n^*(\vec{y}) e^{-a^2 \lambda_n (t - \tau)}}_{U(\vec{x}, \vec{y}, t, \tau)}$$

denn

$$\begin{aligned} U_t - a^2 \Delta U &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-a^2 \lambda_n + a^2 \lambda_n)}_{=0} X_n(\vec{x}) X_n^*(\vec{y}) e^{-a^2 \lambda_n (t - \tau)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

²Beweis in Fischer und Kaul, Mathe. für Physik 2, §15

2 Partielle Differentialgleichungen

und

$$U|_{t=\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\vec{x}) X_n^*(\vec{y}) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

da die $\{X_n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

$$T_{in}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\vec{x}) \int_0^t d\tau \int_D dV_y X_n^*(\vec{y}) e^{-a^2 \lambda_n(t-\tau)} f(\vec{y}, \tau)$$

c) Inhomogene Gleichung mit inhomogenen Randbedingung

Problemstellung:

$$T_t - a^2 \Delta T = f(\vec{x}, t) \quad \text{in } D \quad (2.88)$$

mit $T(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x})$ in D und $T(\vec{x}, t) = \mu(\vec{x}, t)$ auf ∂D .

Ziel: Abbildung dieses Problems auf (a) und (b).

Ansatz: $w(\vec{x}, t)$ ist beliebige hinreichend reguläre Funktion in D .

$$w(\vec{x}, t) = \mu(\vec{x}, t) \quad \text{auf } \partial D$$

$$T(\vec{x}, t) = \underbrace{w(\vec{x}, t)}_{\text{Diese Fkt. geben wir vor.}} + \underbrace{v(\vec{x}, t)}_{\text{Diese Fkt. müssen wir noch bestimmen.}}$$

Aus (2.88) folgt die Problemstellung für v :

$$v_t - a^2 \Delta v = \tilde{f}(\vec{x}, t)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\vec{x}, t) &:= f(\vec{x}, t) - w_t + a^2 \Delta w, \\ v(\vec{x}, 0) &= \tilde{\varphi}(\vec{x}) \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\varphi}(\vec{x}) := \varphi(\vec{x}) - w(\vec{x}, 0)$$

und

$$v(\vec{x}, t) \equiv 0 \quad \text{auf } \partial D.$$

Somit lässt sich $v(\vec{x}, t)$ mit einer Kombination von (a) und (b) ermitteln:

$$v(\vec{x}, t) = v_{in}(\vec{x}, t) + v_h(\vec{x}, t)$$

Temperaturwellen

Problemstellung: Wie pflanzen sich tägliche und jährliche Temperaturschwankungen in den Erdboden fort?

$x = 0$: Erdoberfläche

$0 < x < \infty$: Erdinnere

Bestimmende Gleichung: Wärmeleitungsgleichung in 1D

$$T_t - a^2 T_{xx} = 0 \quad \text{für } 0 \leq x < \infty \quad (2.89)$$

Annahme: Periodische Temperaturschwankungen auf der Erdoberfläche

$$T(0, t) = A \cos(\omega t), \quad A \in \mathbb{R} \quad (2.90)$$

Vorgehensweise:

Wähle als Ansatz die komplexe Funktion $w(x, t)$ mit $w(0, t) = Ae^{i\omega t}$ und

$$T(x, t) = \operatorname{Re} w(x, t).$$

Dadurch wird das Problem mathematisch einfacher.

Ansatz:

$$w(x, t) = Ce^{\alpha x + \beta t}$$

Einsetzen in (2.89) ergibt

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2} \beta$$

Einsetzen in (2.90)

$$C = A, \quad \beta = i\omega$$

Daraus folgt

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \pm \left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \right)$$

Für $w(x, t)$ folgt

$$w(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x + i \left(\omega t \pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x \right)}$$

+: exponentielles Anwachsen von T im Erdboden (unphysikalisch)

-: exponentielles Abfallen von T im Erdboden (physikalisch)

$$T(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x} \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} x \right)$$

Physikalische Konsequenzen:

- Exponentielle Abnahme der Amplitude mit der Eindringtiefe.

2 Partielle Differentialgleichungen

- Langsame Schwankungen (kleine ω) dringen um den Faktor $\sqrt{\omega}$ tiefer ein.
- Temperaturmaxima im Erdinnern sind gegenüber den Maxima an der Oberfläche um $\Delta t = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}x$ verzögert.

Bemerkung: Gleichung (2.90) ist der große Unterschied zwischen den Temperaturwellen und der 1D Wärmeleitung wie wir sie in Kapitel 2.6 besprochen haben.

3 Mathematischer Anhang

3.1 Partielles Differenzieren und das totale Differenzial

Partielles Differenzieren bei einer Funktion von mehreren Variablen:

Bei einer Funktion $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, die von n unabhängigen Variablen x_1, x_2, \dots, x_n abhängt, lassen sich insgesamt $n \in \mathbb{N}$ PARTIELLE ABLEITUNGEN 1. ORDNUNG bilden.

Vorgehensweise:

- (i) In $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ werden zunächst alle unabhängigen Variablen bis auf die Differentiationsvariable als KONSTANTE GRÖSSEN, also als PARAMETER betrachtet.
- (ii) Die gegebene Funktion erscheint nun als eine Funktion von EINER VARIABLEN und wird nach dieser Variablen differenziert. Dies ist die PARTIELLE ABLEITUNG 1. ORDNUNG

Schreibweise:

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Sei

$$z = f(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} x &= x(t), & y &= y(t), & (t_1 \leq t \leq t_2) \\ \Rightarrow z &= f(x(t), y(t)) = F(t) & & & (t_1 \leq t \leq t_2) \end{aligned}$$

z heißt ZUSAMMENGESETZTE oder VERKETTETE FUNKTION dieses Parameters. Die Ableitung von z nach t bestimmt sich zu

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Totales oder vollständiges Differential

einer Funktion $z = f(x, y)$ von zwei unabhängigen Variablen:

$$df = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Geometrische Deutung:

Änderung der Höhenkoordinate auf der im Berührungspunkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ errichteten Tangentialebene.

3.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Definition: Eine in x_0 und in einer gewissen Umgebung von x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x_0 STETIG, wenn der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle existiert und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definition: Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle $x = x_0$ DIFFERENZIERBAR, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + \Delta x - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert.

3.3 Normaxiome

- 1.) $\| u \| \geq 0$ (Nichtnegativität)
- 2.) $\| u \| = 0$ genau dann, wenn $u = 0$ (Eindeutigkeit)
- 3.) $\| \lambda u \| = |\lambda| \| u \|$ (Skalierung)
- 4.) $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$ (Dreiecksungleichung)

3.4 Lineare Algebra

Definition einer reellen Matrix:

$$\underline{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \right\} m \text{ Zeilen } a_{ik} \in \mathbb{R}$$

Definition der transponierten Matrix A^T

$$a_{ik}^T = a_{ki}$$

Vertauschung von Zeilen und Spalten

$$(\underline{A}^T)^T = \underline{A}$$

Definition einer Dreiecksmatrix:

Eine n -reihige, quadratische Matrix wird als Dreiecksmatrix bezeichnet, wenn alle Elemente ober- ODER unterhalb der Hauptdiagonalen verschwinden, also

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition einer symmetrischen Matrix:

$\underline{A} = (a_{ik})$ heißt symmetrisch falls

$$a_{ik} = a_{ki} \quad , \forall i, k$$

Rechenoperationen von Matrizen

1. Addition:

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} = (c_{ik})$$

mit $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$

2. Multiplikation mit einem Skalar:

$$\lambda \underline{A} = \lambda(a_{ik}) = (\lambda \cdot a_{ik})$$

3. Multiplikation von Matrizen:

$\underline{A} = (a_{ik})$ sei Matrix vom Typ (m, n)

$\underline{B} = (b_{ik})$ sei Matrix vom Typ (n, p)

$$\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B} = (c_{ik}) \quad \text{mit} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Achtung: nur möglich, wenn die Spaltenzahl von \underline{A} mit der Zeilenzahl von \underline{B} übereinstimmt

Rechenregeln:

$$\underline{A}(\underline{BC}) = (\underline{AB})\underline{C} \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{AB} + \underline{AC} \quad (\text{Distributivgesetz})$$

$$(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{AC} + \underline{BC}$$

$$(\underline{AB})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T$$

Determinanten

Determinanten einer 2-reihigen, quadratischen Matrix $\underline{A} = (a_{ik})$

$$\det(\underline{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinanten einer 3-reihigen, quadratischen Matrix $\underline{A} = (a_{ik})$

$$\begin{aligned} \det(\underline{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Laplacescher Entwicklungssatz

Eine 3-reihige Determinante lässt sich nach jeder der drei Zeilen oder Spalten, wie folgt entwickeln:

- Entwicklung nach der i -ten Zeile

$$D = \det(\underline{A}) = \sum_{k=1}^3 a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1, 2, 3)$$

- Entwicklung nach der k -ten Spalte

$$D = \det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^3 a_{ik}A_{ik} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$A_{ik} = (-1)^{i+k}D_{ik}$: ALGEBRAISCHES KOMPLEMENT von a_{ik} in D

D_{ik} : 2-reihige Unterdeterminante von D (in D wird die i -te Zeile und k -te Spalte gestrichen).

Beispiel:

$$D_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Determinanten n -ter Ordnung

Definition: Der Wert einer n -reihigen Determinante $D = \det \underline{A}$ wird rekursiv nach der Entwicklungsformel

$$D = \det(\underline{A}) = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1, 2, 3)$$

berechnet (Entwicklung nach i -ter Zeile). Eine Entwicklung nach der k -ten Spalte ist ebenfalls möglich.

Rechenregeln

1. Der Wert einer Determinante ändert sich NICHT, wenn Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden, d.h. $\det A^T = \det A$.
2. Bei Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) ändert eine Determinante ihr Vorzeichen.
3. Werden die Elemente einer bel. Zeile (oder Spalte) mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ .
4. Eine Determinante besitzt den Wert Null, wenn sie mindestens eine der folgenden Eigenschaften erfüllt:
 - a) ALLE Elemente einer Zeile (oder Spalte) sind Null.
 - b) Zwei Zeilen (oder Spalten) sind zueinander proportional.
 - c) Eine Zeile (oder Spalte) ist als Linearkombination der übrigen Zeilen (oder Spalten) darstellbar.
5. Der Wert einer Determinante ändert sich NICHT, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile (bzw. Spalte) hinzu addiert.
6. $\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = (\det \underline{A}) \cdot (\det \underline{B})$
7. Die Determinante einer n -reihigen Dreiecksmatrix \underline{A} besitzt den Wert $\det \underline{A} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Definition:

$\det \underline{A} \neq 0 \Rightarrow \underline{A}$ heißt REGULÄR

$\det \underline{A} = 0 \Rightarrow \underline{A}$ heißt SINGULÄR

Inverse Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$: ALGEBRAISCHES KOMPLEMENT

D_{ik} : $(n-1)$ -reihige Unterdeterminante von $\det A$ (Streichung von i -ter Zeile und k -ter Spalte)

3 Mathematischer Anhang

Definition: \underline{A} heißt ORTHOGONAL, wenn $\underline{A}^T = \underline{A}^{-1}$.

Eigenschaften von orthogonalen Matrizen:

1. Die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix \underline{A} bilden ein orthonormiertes System.
2. $\det \underline{A} = \pm 1$
3. $\underline{A} \cdot \underline{B}$ ist orthogonal, falls \underline{A} und \underline{B} orthogonal sind.

Über das Lösungsverhalten eines linearen (m, n) -Systems $\underline{A}x = c$:

1. Ein lineares (m, n) -System ist nur lösbar, wenn \underline{A} und $(\underline{A} | c)$ ranggleich sind:

$$Rg \underline{A} = Rg(\underline{A} | c) = r$$

Der RANG EINER MATRIX A ist die höchste Ordnung r aller von Null verschiedenen Unterdeterminanten von A .

2. Im Falle der Lösbarkeit gilt:

(a) $r = n \Rightarrow$ genau eine Lösung

(b) $r < n \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen mit $n - r$ freien Parametern

Cramersche Regel

Ein lineares (n, n) -System $\underline{A}\vec{x} = \vec{c}$ mit regulärer Koeffizientenmatrix \underline{A} besitzt die EINDEUTIG bestimmte Lösung

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mit $D = \det \underline{A} \neq 0$ und

D_i : Hilfsdeterminante von D , in dem man die i -te Spalte durch c ersetzt.

Definition: Komplex konjugierte Matrix $\underline{A}^* = (a_{ik}^*)$ zu $\underline{A} = (a_{ik})$

Definition: hermitesche Matrix $\underline{A}^\dagger = \underline{A}$

Definition: schieferhermitesche Matrix $\underline{A}^\dagger = -\underline{A}$

Definition: unitäre Matrix $\underline{A} \cdot \underline{A}^\dagger = E$

Eigenschaften einer unitären Matrix

1. $\underline{A}^\dagger = \underline{A}^{-1}$ (per Definition)
2. $|\det \underline{A}| = 1 \Rightarrow \det \underline{A} \neq 0 \Rightarrow \underline{A}$ ist stets regulär, d.h. \underline{A}^{-1} existiert immer.
3. Im Reellen: unitäre Matrix = orthogonale Matrix
4. Die Inverse einer unitären Matrix ist ebenso wie das Produkt unitärer Matrizen wiederum eine unitäre Matrix.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix

Ziel: löse

$$\underline{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

bzw.

$$(\underline{A} - \lambda\underline{E})\vec{x} = 0$$

\underline{A} : n -reihige (reelle oder komplexe) Matrix

\underline{E} : n -reihige Einheitsmatrix

λ : Eigenwert (EW) der Matrix \underline{A}

\vec{x} : Eigenvektor (EV) der Matrix \underline{A} zum Eigenwert λ

$\underline{A} - \lambda\underline{E}$: Charakteristische Matrix von \underline{A}

1. $(\underline{A} - \lambda\underline{E})\vec{x} = 0$ ist nur dann nicht-trivial lösbar, wenn $\det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = 0$.
2. Der zum EW λ_i gehörige EV \vec{x}_i ergibt sich als Lösungsvektor des homogenen linearen GLS

$$(\underline{A} - \lambda_i\underline{E})\vec{x}_i = 0.$$

Er wird üblicherweise in normierter Form angegeben.

Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Die Spur der Matrix \underline{A} ist gleich der SUMME aller EW:

$$Sp(\underline{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

2. Die Determinante von \underline{A} ist gleich dem PRODUKT aller EW

$$\det \underline{A} = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

3. Sind alle EW voneinander verschieden, so gehört zu jedem EW genau EIN linear unabhängiger EV, der bis auf einen (beliebigen) konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist.

3 Mathematischer Anhang

4. Tritt ein EW dagegen k -fach auf, so gehören hierzu MINDESTENS EIN, HÖCHSTENS aber k linear unabhängige EV.
5. Die zu verschiedenen EW gehörenden EV sind immer LINEAR UNABHÄNGIG.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix $\underline{A} = \underline{A}^T$

1. Alle n EW sind reell.
2. Es gibt insgesamt genau n linear unabhängige EV.
3. Zu jedem EINFACHEN EW gehört GENAU EIN LINEAR UNABHÄNGIGER EV, zu jedem k -FACHEN EW dagegen genau k LINEAR UNABHÄNGIGE EV.
4. EV, die zu verschiedenen EW gehören, sind ORTHOGONAL.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix $\underline{A} = \underline{A}^\dagger$

1. Alle n EW sind reell.
2. Es gibt insgesamt genau n linear unabhängige EV.
3. Zu jedem einfachen EW gehört genau ein linear unabhängiger EV, zu jedem k -fachen EW gehören dagegen stets k linear unabhängige EV.

Lineare Abbildung und Ähnlichkeitstransformation

$$\vec{x}' = \underline{U}\vec{x}$$

beschreibt eine Abbildung des Vektorraum X auf sich selbst (LINEARE ABBILDUNG).
 \underline{U} heißt LINEARER OPERATOR.

Wie verändert sich die Matrixgleichung

$$\underline{A}\vec{x} = \vec{b}$$

unter so einer Transformation auf neue Koordinaten?

$$\begin{aligned}\underline{A}\vec{x} = \vec{b} &\longrightarrow \underline{U}\underline{A}\underline{U}^{-1}\underline{U}\vec{x} = \underline{U}\vec{b} \\ \underline{A}' \cdot \vec{x}' &= \vec{b}'\end{aligned}$$

Bemerkung:

- (i) Die Transformationsmatrix muss invertierbar sein.
- (ii) Vektoren transformieren sich durch Multiplikation mit \underline{U} .
- (iii) Matrizen in den neuen Koordinaten $\underline{A}' = \underline{U}\underline{A}\underline{U}^{-1}$

Wenn \underline{U} UNITÄR ist, so nennt man die Transformation eine ÄHNLICHKEITSTRANSFORMATION.

Diagonalisierung einer Matrix

Betrachte das Eigenwertproblem

$$(\underline{A} - \lambda \underline{E})\vec{v} = 0$$

mit EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und EV $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$

Annahme: $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und die EV \vec{v}_i seien orthogonal und auf die Länge 1 normiert.

Definition: Für eine Matrix \underline{U} aus den EV \vec{v}_i gilt

$$\begin{aligned} \underline{U} &\equiv (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \Leftrightarrow (\underline{U})_{ji} = (\vec{v}_i)_j \\ \Rightarrow \underline{U}^\dagger \underline{U} &= \underline{U} \underline{U}^\dagger = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^\dagger \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1^\dagger \cdot \vec{v}_2 & \cdots \\ \vec{v}_2^\dagger \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2^\dagger \cdot \vec{v}_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vec{v}_n^\dagger \cdot \vec{v}_n \end{pmatrix} = \underline{E} \end{aligned}$$

\Rightarrow \underline{U} ist UNITÄR. (Wenn alle EV reell sind, dann ist U sogar ORTHOGONAL.)

$$\underline{A} \underline{U} = (\lambda_1 \vec{v}_1, \dots, \lambda_n \vec{v}_n) = \underline{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\equiv \underline{\Lambda}} \equiv \underline{U} \underline{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \underline{U}^\dagger \underline{A} \underline{U} = \underline{\Lambda}$$

\underline{U} bringt \underline{A} in Diagonalform. Aus $\underline{U} \underline{\Lambda} \underline{U}^\dagger = \underline{A}$ folgt $(\underline{A})_{lm} = \sum_i \lambda_i (\vec{v}_i)_l (\vec{v}_i^\dagger)_m$. Man kann also die Matrix \underline{A} aus ihren EW und EV rekonstruieren (SPEKTRALZERLEGUNG bzw. SPEKTRALDARSTELLUNG).

NORMALE Matrizen mit $[\underline{A}, \underline{A}^\dagger] = 0$ sind unitär diagonalisierbar. Manche Matrizen sind auch nicht unitär diagonalisierbar durch $\underline{U}^\dagger \underline{A} \underline{U} = \underline{\Lambda}$. Andere Matrizen sind überhaupt nicht diagonalisierbar.

Beispiel:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom hat die Lösung

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} &= (3 - \lambda)^2 - 4 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 1 \quad \lambda_2 = 5 \end{aligned}$$

3 Mathematischer Anhang

Bestimmungsgleichung für EV:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 - \lambda_i & -2 \\ -2 & 3 - \lambda_i \end{pmatrix} \vec{v}_i &= 0 \\ \Rightarrow \vec{v}_1 &\propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_2 &\propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normierung:

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Überprüfung der Spektraldarstellung:

$$\lambda_1(\vec{v}_1)_l(\vec{v}_1^\dagger)_m + \lambda_2(\vec{v}_2)_l(\vec{v}_2^\dagger)_m = 1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Definition: für das KREUZPRODUKT zweier Matrizen

$$\underline{A} \otimes \underline{B} \equiv \begin{pmatrix} a_{11}\underline{B} & a_{12}\underline{B} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\underline{B} & \cdots & a_{mn}\underline{B} \end{pmatrix}$$

\underline{A} : (m , n) Matrix

\underline{B} : (p , q) Matrix

Das Kreuzprodukt wird auch TENSORPRODUKT genannt.

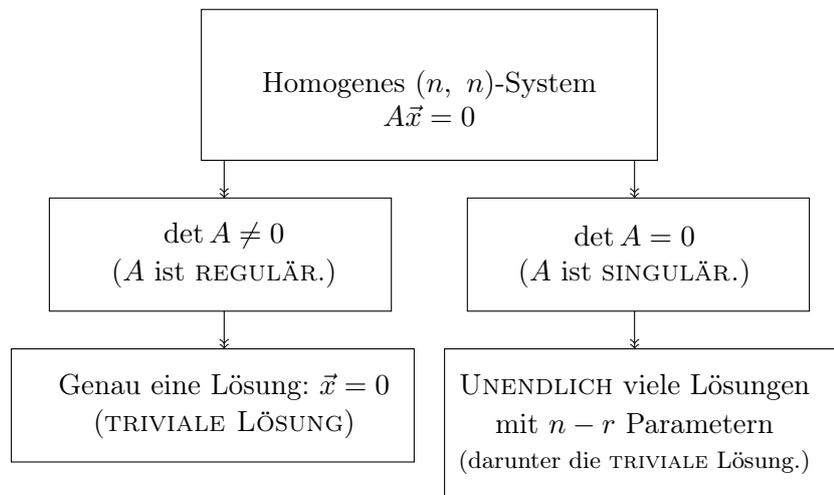
Beispiel:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \sigma_x \otimes \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & -i \\ & & i & \\ -i & & & \\ i & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (\underline{A} \otimes \underline{B})^* &= \underline{A}^* \otimes \underline{B}^* \\ (\underline{A} \otimes \underline{B})^T &= \underline{A}^T \otimes \underline{B}^T \\ (\underline{A} \otimes \underline{B})^\dagger &= \underline{A}^\dagger \otimes \underline{B}^\dagger \end{aligned}$$

Kriterien für die Lösbarkeit eines homogenen, linearen (n, n) -Systems $A\vec{x} = 0$:



Definition: Unter dem RANG einer Matrix A , $\text{Rg}(A)$ vom Typ (m, n) wird die HÖCHSTE Ordnung r aller von Null verschiedenen Unterdeterminanten von A verstanden.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt, dass der Rang r höchstens drei sein kann.
3-reihige Unterdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2-reihige Unterdeterminante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Hieraus folgt, dass der Rang von A gleich zwei ist.

3.5 Vektoranalysis

Gradient des Skalarfeldes Φ :

$$\text{grad}\Phi(x_1, x_2, x_3) = \vec{\nabla}\Phi(x_1, x_2, x_3) = \hat{e}_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}$$

3 Mathematischer Anhang

mit NABLA-OPERATOR

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \hat{e}_1 \partial_{x_1} + \hat{e}_2 \partial_{x_2} + \hat{e}_3 \partial_{x_3}$$

beschreibt Veränderungen der Feldgröße Φ .

Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}(x_1, x_2, x_3)$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

ist eine skalare Größe. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Maß für die Existenz von Quellen oder Senken.

Laplace-Operator Δ

$\hat{=}$ Divergenz eines Gradienten

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi \hat{=} \Delta \Phi$$

mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}(x_1, x_2, x_3)$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{e}_1 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \hat{e}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \hat{e}_3 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)$$

Man nennt Vektorfelder mit nicht-verschwindender Rotation Wirbelfelder.

3.6 Distributionen und Greensche Funktionen

nach: Honerkamp und Römer, Klassische Theoretische Physik, Eine Einführung
Betrachte stetige lineare Abb. auf Funktionsräumen F .

$$l : F \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$l(c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2) = c_1 l(\phi_1) + c_2 l(\phi_2) \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in F, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Mögliche Funktionsräume:

D : Raum der unendlich oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger

J : Raum der unendlich oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen, die im Unendlichen mit allen ihren Ableitungen stärker als jede Potenz gegen Null geht.

3.6.1 Distributionen

Beispiel: für stetige lineare Funktionale

(a)

$$l(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \phi(t).$$

wobei f eine bestimmte stetige Funktion ist. Solche Funktionale heißen REGULÄR.

(b)

$$\delta(\phi) = \phi(0)$$

Dieses Funktional heißt δ -Funktional.

Nicht jedes stetige lineare Funktional ist regulär von der Form (a). Es gilt aber:

Satz: (ohne Beweis)

Zu jedem stetigen linearen Funktional l (auf D und J) gibt es eine Folge (f_n) , $n = 1, 2, \dots$ stetiger Funktionen, so dass

$$l(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt f_n(t) \phi(t) \quad \forall \phi \in D \text{ oder } \phi \in J.$$

Man schreibt formal

$$l(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \phi(t)$$

auch für NICHT-REGULÄRE Funktionale. In diesem Fall ist $f(t)$ nicht eine Funktion, sondern eine DISTRIBUTION.

Das δ -Funktional ist nicht regulär. Eine zugehörige Funktion δ müsste nämlich völlig auf den Punkt $t = 0$ konzentriert sein und müsste andererseits

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) = 1$$

erfüllen, was unmöglich ist.

Die δ -Distribution ist definiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) \phi(t) = \phi(0) \quad \forall \phi \in D \text{ oder } J.$$

Folgen $f_n(t)$ mit $f_n(t) \rightarrow \delta(t)$ im Sinne von Distributionen sind:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2 t^2} & f_n(t) &= n e^{-n^2 \pi t^2} \\ f_n(t) &= \frac{n}{\pi} \left(\frac{\sin(nt)}{nt} \right)^2 & f_n(t) &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nt)}{t} \end{aligned} \quad (*)$$

3 Mathematischer Anhang

Es gilt $\forall f_n(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f_n(t) = 1, \quad n > 0$$

Es sei $l(\phi) = \int dt f(t)\phi(t)$ ein reguläres Funktional mit stetig differenzierbarer Funktion f . Dann ist auch das Funktional

$$l'(\phi) \equiv \int dt f'(t)\phi(t)$$

regulär, und partielle Integration ergibt

$$l'(\phi) = - \int dt f(t)\phi'(t) = -l(\phi').$$

Definition: Für lineare stetige Funktionale (die regulär oder nicht regulär sein können) def. man eine Distributionsableitung l' als

$$l'(\phi) = -l(\phi') \quad \forall \phi \in D \text{ oder } J.$$

Beispiel:

$$\delta'(\phi) = -\phi'(0)$$

explizit

$$\int dt \delta'(t)\phi(t) = - \int dt \delta(t)\phi'(t) = -\phi'(0).$$

Im Distributionssinne gilt:

$$\Theta'(t) = \delta(t)$$

mit der Heaviside-Fkt.

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \Theta'(t)\delta(t) &\equiv - \int_{-\infty}^{\infty} dt \Theta(t)\phi'(t) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \phi'(t) = \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t)\phi(t) \end{aligned}$$

Rechenregeln für die δ -Distribution

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t - t_0)\phi(t) \equiv \phi(t_0)$$

- (i) $\delta(t - t_0)f(t) = \delta(t - t_0)f(t_0)$
- (ii) $t\delta(t) = 0$
- (iii) $\delta(t) = \delta(-t)$
- (iv) $\Theta'(t - t_0) = \delta(t - t_0)$
- (v)

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta(g(t)) = \sum_i \frac{1}{|g'(t_i)|}\delta(t - t_i),$$

wobei die t_i 's die Nullstellen von g sind.

Aus der Umkehrformel der Fourier-Transformation folgt eine sehr nützliche Darstellung des δ -Funktionals:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega)$$

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega t'} f(t')$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} f(t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t - t') f(t')$$

$$\Rightarrow \delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}$$

Daraus lässt sich Gl. (*) schön herleiten.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n d\omega e^{i\omega(t-t')} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(n(t-t'))}{t-t'}$$

Dirac- δ -Distribution

Sei C^∞ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Eine Distribution ist grob gesprochen eine Abbildung $C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, etwas genauer ein lineares stetiges Funktional. Sei $f \in C^\infty$, dann ist die Dirac- δ -Distributionen¹ $\delta_{x_0}[f]$ durch die Abbildung

$$f \mapsto \delta_{x_0}[f] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0) \tag{3.1}$$

¹In der physikalischen Literatur ist oft etwas ungenau von der Dirac- δ -Funktion die Rede..

3 Mathematischer Anhang

mit

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ \infty & \text{für } x = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

insbesondere gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) = 1. \quad (3.3)$$

Man kann $\delta(x)$ als Grenzwert von Funktionen erhalten. Verschiedene äquivalente Beispiele sind:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta^{(\epsilon)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{für } |x| \leq \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}}$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

Integraldarstellung:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx}. \quad (3.4)$$

Die nachfolgenden Rechenregeln sind immer unter einem Integral zu verstehen:

$$x \delta(x) = 0$$

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

$$f(x)\delta(x - y) = f(y)\delta(x - y)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_{i, g(x_i)=0} \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad \text{mit } g'(x_0) = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i}$$

Man kann die δ -Distribution als Ableitung der Heavyside-Funktion $\theta(x)$ auffassen:

$$\delta(x) = \theta'(x) \quad (3.5)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Man kann auch Ableitungen der δ -Distribution betrachten, indem man eine partielle Integration durchführt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x - x_0) f(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f'(x) = -f'(x_0). \quad (3.7)$$

Dies kann verallgemeinert werden zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x_0) \quad \text{mit} \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x). \quad (3.8)$$

Verallgemeinerung auf drei Dimensionen:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (3.9)$$

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{-i\vec{k}\vec{x}} \quad (3.10)$$

3.6.2 Green Funktion

Definition: Eine Distribution $G(t, t')$, die von einem Parameter t' abhängt, heißt GREEN FUNKTION zu einem linearen Differentialoperator L , wenn im Distributivonssinne

$$LG(t, t') = \delta(t - t')$$

gilt. Eine spezielle Lösung $x_{sp}(t)$ der DGL $Lx = h$ ist dann

$$x_{sp}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') h(t')$$

Beweis:

$$\begin{aligned} Lx_{sp}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' LG(t, t') h(t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t - t') h(t') = h(t). \end{aligned}$$

Beispiel:

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + a(t) \frac{d}{dt} + b(t)$$

$Z_{t'}(t)$ sei Lösung der homogenen Gl.

$$\ddot{Z}_{t'}(t) + a(t) \dot{Z}_{t'}(t) + b(t) Z_{t'}(t) = 0$$

zu den Anfangswerten $Z_{t'}(t') = 0$, $\dot{Z}_{t'}(t') = 1$. Dann ist

$$G(t, t') = \Theta(t - t') Z_{t'}(t)$$

Green Funktion zu L .

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(t, t') &= \Theta(t - t')Z_{t'}(t) + \delta(t - t')Z_{t'}(t) \\ &= \Theta(t - t')\dot{Z}_{t'}(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}G(t, t') &= \Theta(t - t')\ddot{Z}_{t'}(t) + \delta(t - t') \\ \Rightarrow LG(t, t') &= \Theta(t - t')\underbrace{LZ_{t'}(t)}_{=0} + \delta(t - t') \\ &= \delta(t - t') \end{aligned}$$

3.7 Satz von Gauß

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV \quad (3.11)$$

$V \subset \mathbb{R}^3$ kompaktes Volumen mit stückweise glattem Rand ∂V

Beweis: (mit Einschränkung auf Quadergeometrie)

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} \vec{A} \cdot d\vec{F} &= \int_{a_1}^{a_2} dr_1 \int_{b_1}^{b_2} dr_2 [A_3(r_1, r_2, c_2) - A_3(r_1, r_2, c_1)] \\ &\quad + \int_{b_1}^{b_2} dr_2 \int_{c_1}^{c_2} dr_3 [A_1(a_2, r_2, r_3) - A_1(a_1, r_2, r_3)] \\ &\quad + \int_{c_1}^{c_2} dr_3 \int_{a_1}^{a_2} dr_1 [A_2(r_1, b_2, r_3) - A_2(r_1, b_1, r_3)] \\ &= \int_{a_1}^{a_2} dr_1 \int_{b_1}^{b_2} dr_2 \int_{c_1}^{c_2} dr_3 \underbrace{\frac{\partial A_1}{\partial a_1} \frac{\partial A_2}{\partial b_1} \frac{\partial A_3}{\partial c_1}}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}} \end{aligned}$$

3.8 Numerische Verfahren

nach [8], Vorlesungsskript CP

A Vorteile und Gefahren

Rechner sind endliche Maschinen und können daher nur diskrete Probleme behandeln.

$u(x)$ sei eine Funktion, Δx eine Schrittweite

$$u_j := u(j \Delta x) \quad j \in \mathbb{N} \text{ oder } \mathbb{Z}$$

Es gibt drei übliche Approximationen für die erste Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}(j \Delta x)$:

$$\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} \quad (\text{i})$$

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \quad (\text{ii})$$

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2 \Delta x} \quad (\text{iii})$$

Diese Approximationen folgen direkt aus der Taylor-Entwicklung von $u(x)$. ($u(x)$ sei eine C^4 -Funktion.)

$$u(x + \Delta x) = u(x) + u'(x)\Delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(x)(\Delta x)^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - u'(x)\Delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\Delta x)^2 - \frac{1}{6}u'''(x)(\Delta x)^3 + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u'(x) &= \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ &= \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \\ &= \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung gilt:

$$u''(x) = \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Für die Funktion zweier Variablen $u(x, t)$ wählen wir eine Schrittweite in beiden Variablen:

$$u_j^n := u(j\Delta x, n\Delta t) \quad (n, j: \text{beides Indizes})$$

$$\Rightarrow \text{z.B.} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(j\Delta x, n\Delta t) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta t) = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Numerische Fehler

- (i) Abschneidefehler: hängen mit $\mathcal{O}(\Delta x)$ etc. zusammen, akkumulieren sich
- (ii) Rundungsfehler: Computer rechnet nur mit einer gewissen Anzahl von Dezimalstellen (8 oder 16)

B Numerische Verfahren zur Lösung eines Systems von n gewöhnlichen DGL
1. Ordnung

$$\begin{aligned}\vec{y}'(x) &= \vec{f}(x, \vec{y}(x)) \\ y_1'(x) &= y_2(x) \\ x_2'(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= f(x, y_1(x), \dots, y_n(x))\end{aligned}$$

Betrachte zunächst das einkomponentige Problem

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Diskretisierung von x :

$$x = x_0 + jh, \quad j \in \mathbb{N}$$

mit der Schrittweite der Iteration h .

Definition:

$$x_j := x_0 + jh, \quad y_j := y(x_j), \quad y_j' := y'(x_j)$$

Einschrittverfahren:

Berechnung von y_{j+1} allein auf der Grundlage von y_0 .
(Beispiel: Euler- und Runge-Kutta-Verfahren)

Mehrschrittverfahren:

(z.B. Zweisritt ...) Berechnung von y_{j+1} auf der Basis von zwei zuvor berechneten Stützstellen y_j und y_{j-1} .

Euler-Verfahren

Grundlage fast jeden Iterationsverfahrens ist die Taylorentwicklung

$$y_{j+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} y_j^{(k)} = y_j + h y_j' + \frac{h^2}{2} y_j'' + \dots$$

Wären alle Ableitungen bekannt, könnte man die DGL "exakt" iterieren. Man kennt aber nur $y_j' = f(x_j, y_j)$. Es entsteht ein Iterationsfehler der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$

$$y_{j+1} = y_j + h f(x_j, y_j) + \mathcal{O}(h^2)$$

Runge-Kutta-Verfahren

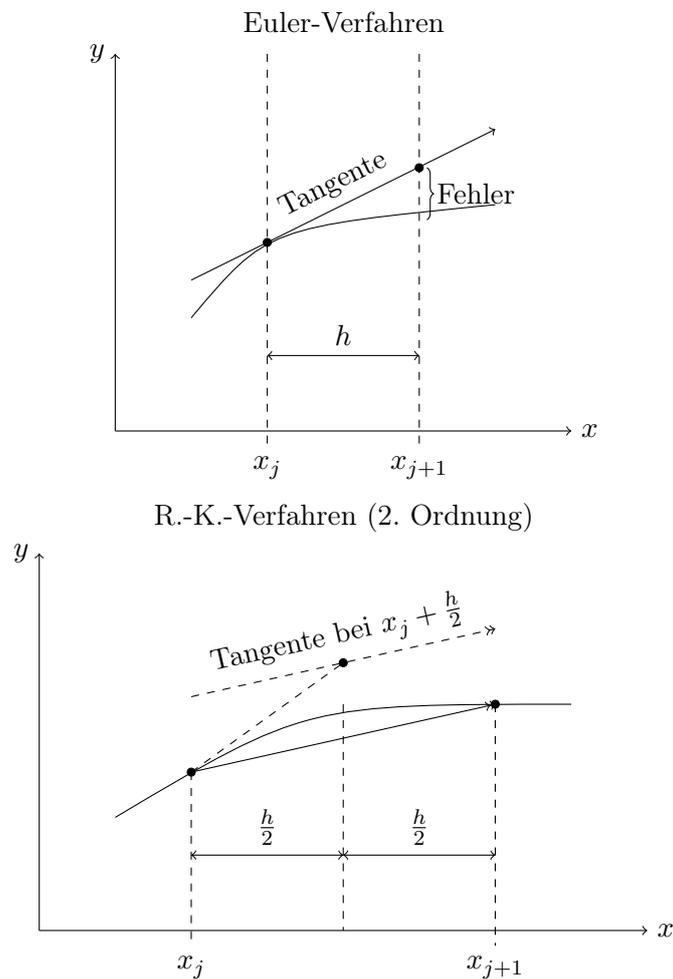
(2. Ordnung)

Idee: Nähere die Steigung der Sekante von Stützstelle zu Stützstelle nicht wie beim Euler-Verfahren durch die Tangente im linken Punkt, sondern nutze die Steigung in der Mitte der beiden Stützstellen.

$$y_{j+1} = y_j + hf \left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) \right) + \mathcal{O}(h^3)$$

Die Iteration kostet mehr Zeit, dafür skaliert der Fehler nur mit $\mathcal{O}(h^3)$.

Veranschaulichung



R.-K.-Verfahren höherer Ordnung sind analog aber nicht eindeutig definiert, d.h. es gibt eine Vielzahl solcher Näherungen.

Beispiel: R.-K.-Verfahren 4. Ordnung

$$y_{j+1} := y_j + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

mit

$$k_1 := hf(x_j, y_j)$$

$$k_2 := hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 := hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 := hf(x_j + h, y_j + k_3)$$

Fehlerschätzung (für das R.-K.-Verfahren)

Beispiel: Halbschrittverfahren

Vgl. einen ganzen Iterationsschritt $y_{j+1} = RK_h(y_j)$ mit zwei Halbschritten

$$\tilde{y}_{j+1} = RK_{\frac{h}{2}}\left(RK_{\frac{h}{2}}(y_j)\right).$$

Δ : Fehler von $RK_h(y_j)$

$\tilde{\Delta}$: Fehler von $RK_{\frac{h}{2}}(y_j)$

Die Fehler bei einem R.-K.-Verfahren k -ter Ordnung skalieren wie h^{k+1} , d.h.

$\Delta \simeq ah^{k+1}$, $\tilde{\Delta} \simeq 2a\left(\frac{h}{2}\right)^{k+1}$ mit a als unbekannte Proportionalitätskonstante.

Aus

$$y_j - \tilde{y}_j = \Delta - \tilde{\Delta} = a(1 - 2^{-k})h^{k+1} = (1 - 2^{-k})\Delta$$

folgt

$$\Delta = \frac{y_j - \tilde{y}_j}{1 - 2^{-k}}.$$

Dadurch lässt sich der Fehler abschätzen. Man kann z.B. fordern, dass bei Überschreitung eines vorgegebenen Maximalfehlers die Schrittweite halbiert wird.

Anwendung auf physikalische Probleme

Beispiel: Iteration einer Planetenbewegung

Zwei Himmelskörper bewegen sich im \mathbb{R}^3 im wechselseitigen Gravitationspotential

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Die Bewegungsgleichung für den Relativvektor $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ lautet

$$\mu \ddot{\vec{r}}(t) = -g \frac{m_1 m_2 \vec{r}(t)}{r^3}$$

mit $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ als reduzierte Masse.

Mathematisches Problem: $\ddot{\vec{r}}(t) = -g \frac{\vec{r}(t)}{r^3}$

Beschränkung auf den \mathbb{R}^2 , denn Bewegungen in Zentralpotentialen finden in einer Ebene statt.

Vorgehensweise:

Fasse $\{\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)\} = \{\vec{r}(t), \vec{v}(t)\}$ als vierkomponentigen Vektor auf.

Euler-Zeichschritt:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t+h) &:= \vec{r}(t) + h\vec{v}(t) \\ \vec{v}(t+h) &:= \vec{v}(t) - hg \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|^3}\end{aligned}$$

Runge-Kutta-Verfahren (2. Ordnung):

$$\vec{k}_1 := h\vec{v}(t), \quad \vec{l}_1 := hg \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|^3}, \quad \vec{k}_2 := h \left(\vec{v}(t) + \frac{1}{2}\vec{l}_1 \right), \quad \vec{l}_2 := hg \frac{\vec{r}(t) + \frac{1}{2}\vec{k}_1}{\left| \vec{r}(t) + \frac{1}{2}\vec{k}_1 \right|^3}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \vec{r}(t+h) &:= \vec{r}(t) + \vec{k}_2 \\ \vec{v}(t+h) &:= \vec{v}(t) + \vec{l}_2\end{aligned}$$

Stichwortverzeichnis

Ahnlichkeitstransformation	131	implizit	11
Algebraisches Komplement	126	k-te Ordnung	
Anfangswertproblem	4	partiell	47
asymptotisch		Legendre	109
instabil	42	Legendresche	88
stabil	41	linear	
Banach-Raum	15	erste Ordnung	7
Banachscher Fixpunktsatz	15 f.	konst. Koeffizienten	29
Basis	24	konstante Koeffizienten	59
Bessel-Funktion	107	n-te Ordnung	24
Besselfunktion		partiell	48
erste Art	91	zweite Ordnung	28, 58
sparisch	112	n-te Ordnung	
zweite Art	93	gewöhnlich	2
Charakteristiken	48	partiell	3
Charakteristikenmethode	48	parabolisch	60, 113
charakteristische Stromungslinie	51	speziell	86
Cramersche Regel	128	System	
D'Alembert Ansatz	30, 64	erste Ordnung	21
D'Alembertsche Formel	65	gewöhnlich	3
Determinante	126	partiell	3, 47
Differential	123	ultrahyperbolisch	60
Differentialgleichung	1	zweite Ordnung	
Bessel	83	gewöhnlich	1
Besselsche	90	partiell	3
direkt integrierbar		differenzierbar	124
n-te Ordnung	23	Diffusionsgleichung	114
elliptisch	60	Distribution	135
zweite Ordnung	83	Divergenz	134
erste Ordnung	4	Divergenzsatz	98
exakt	8	Eigenschwingungen	45
explizit	11	Eindeutigkeit	17
erste Ordnung	14	Eindeutigkeitssatz	63, 78
gewöhnlich		Einhüllende	55 f.
n-te Ordnung	21	Einschrittverfahren	142
hermitesch	86	Envelope	56
homogen	6	Euler-Verfahren	142
hyperbolisch	60	Eulersche Differentialgleichung	31
		Existenzsatz von Peano	22
		Existenzssatz	51

STICHWORTVERZEICHNIS

Fixpunkt	16	getrennte Variablen	4
Fixpunktgleichung	17	Lösungsscharen	2
Form		Laplacescher Entwicklungssatz	126
explizit	48	Legendre-Gleichung	109
implizit	48	Legendre-Polynom	90, 109
Formel von Fordriguez	109	linear	48, 59
Fourier-Reihen-Ansatz	73	linear unabhängig	130
Fundamentalsystem	24, 32	lineare Abbildung	130
Funktional		linearer Operator	130
nicht-regular	135	Lipschitzbedingung	14
regular	135	lokal	17
Funktionenfolge	16	Lipschitzkonstante	15
		global	18
Gammafunktion	90	Lipschitzstetigkeit	18
geometrische Reihe	88	Losungsfläche	47
Gleichungssystem		Losungsfundamentalsystem	89
linear			
inhomogen	26	Masimumsprinzip	77
Gradient	133	Matrix	
Green Funktion	95, 139	Definition	124
Green-Funktion	73	Diagonalisierung	131
Greenformel		Dreiecksmatrix	125
erste	98	invers	127
zweite	100	orthogonal	128
Halbschrittverfahren	144	quadratisch	129
Hamilton-Jacobi-Theorie	56	Rechenoperationen	125
Hankelfunktionen	94	symmetrisch	125
Hauptsystem	33	transponiert	124
Helmholtz-Gleichung		unitar	129
inhomogen	101	Matrix-Exponentialfunktion	36
Hermite-Polynom	87	Maximumprinzip	100
homogen	59	Mehrschrittverfahren	142
Huygenssches Prinzip	81	Methode von Fourier	69
		Mittelwerteigenschaft	99
inhomogen	59		
Integrabilitätsbedingung	8	Neumann-Funktion	107
Integral		Neumannfunktion	
singular	55	sparisch	112
Integralfläche	47	Neumannsche Funktion	94
Integrationskonstanten	2	Normaxiome	124
Iteration	16		
kanonische Bewegungsgleichung	56	orthogonal	128
Kettenregel	123		
Klassifikation	59	Parameter	2
Kontraktion	16	partielles Differenzieren	123
Kreuzprodukt	132	Phasenporträt	39
Kugelflächenfunktion	110	Picard-Iteratiion	19
		Picard-Iterierte	19
Lösungsmethode		Picard-Transformation	
		vektorwertig	22

STICHWORTVERZEICHNIS

Picardsche Integralgleichung	14	Sternpunkt	43
Poisson-Formel	81	Strudelpunkt	44
Poisson-Gleichung	83	singuläre Punkte	39
Potentialgleichung	83	singular	56
Potenzreihenansatz	12, 84	Spektraldarstellung	131
quasilinear	48, 58	Spur	129
Radialsymmetrisch	83	stetig	124
Randbedingung		Sukzessive Integration	23
Cauchy	62	symmetrische Matrix	
Dirichlet	62	definit	59
Neumann	62	indefinit	59
symmetrisch	100	semidefinit	59
Randbedingungen	45	System	
Randwertproblem		autonom	39
Dirichlet	102	linear	32
gemischt	102	konst. Koeffizienten	36
Neumann	102	Tensorprodukt	132
Raum		Theorem von Stokes	80
vollständig	16	unitar	131
Rotation	134	Variationsansatz	26, 55
Runge-Kutta-Verfahren	143	Wellengleichung	82
Satz von Gauß	140	dreidimensional	78
Satz von Peano	19	homogen	78
Separationsansatz ...	69, 75, 82, 106, 108	eindimensional	62
Separationskonstante	70	inhomogen	72
singuläre Punkt		Wronski-Determinante	25
Knotenpunkt	42		
Sattelpunkt	43		

Literatur

- [1] N. Pucker C. Lang. *Mathematische Methoden in der Physik*. Springer-Verlag, 2016 (erwähnt auf Seite 16).
- [2] Darmstadt. „Darmstadt Skript“. Skript (erwähnt auf den Seiten 22, 84, 86).
- [3] Stanley J. Farlow. *Partial Diff. Equation for Scientist and Engeneers*. 1982 (erwähnt auf Seite 78).
- [4] Helmut Kaul Helmut Fischer. *Mathematik für Physiker I / II*. Teubner Studienbücher, 1998 (erwähnt auf Seite 74).
- [5] K. Semendjajew I. Bronstein. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 1999 (erwähnt auf Seite 83).
- [6] J. D. Jackson. *Klassische Elektrodynamik Kap. 2*. De Gruyter, 2001 (erwähnt auf den Seiten 104, 105).
- [7] Peter Vachenauer Kurt Meyberg. *Höhere Mathematik 2*. Springer-Verlag, 1991 (erwähnt auf den Seiten 6, 13, 15).
- [8] W. A. Strauss. *Partielle DGL, eine Einführung, Kap. 7*. vieweg, 1995 (erwähnt auf den Seiten 98, 140).
- [9] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, 2000 (erwähnt auf den Seiten 20, 22, 25, 31, 33).

24. Oktober 2017

