

Mathematik 3, Teil 2: Funktionentheorie

Werner Porod

WS 2019/20

26. Januar 2020

Inhaltsverzeichnis

2	Funktionentheorie	1
2.1	Komplexe Funktionen, Differentiation, analytische Funktionen	1
2.1.1	Komplexe Zahlen	1
2.1.2	Folgen, Reihen, Funktionen	6
2.1.3	Elementare Funktionen	9
2.1.4	Mehrdeutigkeit, Riemannsches Blätter, Riemannsche Fläche	10
2.1.5	Analytische Funktionen	14
2.1.6	Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen	16
2.2	Integration	19
2.2.1	Kurvenintegrale	19
2.2.2	Cauchyscher Integralsatz	21
2.2.3	Cauchy’sche Integralformel	25
2.3	Reihen analytischer Funktionen, Residuensatz	29
2.3.1	Gleichmäßige Approximation	29
2.3.2	Singularitäten	31
2.3.3	Potenzreihen, Taylor–Reihe	34
2.3.4	Laurent–Reihe	38
2.3.5	Residuensatz	42
2.4	Fourier-Reihen und Fourier-Transformation	47
2.4.1	Fourier-Reihen	47
2.4.2	Fourier-Transformation	54
2.4.3	Dirac- δ -Distribution	57
2.5	Partialbruch- und Produktentwicklungen	59
2.5.1	Meromorphe Funktionen	59
2.5.2	Ganze Funktionen	61
2.6	Γ -Funktion	64
2.7	Differentialgleichungen im Komplexen	68
2.7.1	Homogene lineare Systeme im regulären Fall	68
2.7.2	Systeme mit isolierten Singularitäten	69
2.7.3	Schwach singuläre Stellen, Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typ	71

Kapitel 2

Funktionentheorie

2.1 Komplexe Funktionen, Differentiation, analytische Funktionen

2.1.1 Komplexe Zahlen

Definition 2.1 (Komplexe Zahlen). *Eine Zahl z heißt **komplex**, wenn sie sich als geordnetes Punktepaar reeller Zahlen oder als Linearkombination aus der reellen und der imaginären Einheit darstellen läßt:*

$$z = (x, y) = x + i y \quad , \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Speziell heißen:

- $(x, 0)$ reelle Zahlen
- $(0, y)$ imaginäre Zahlen
- $(0, 1) =: i$ imaginäre Einheit

Es gelten folgende Rechenregeln:

Addition:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (2.2)$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (2.3)$$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \right) \quad (2.4)$$

Die komplexen Zahlen bilden den Körper \mathbb{C} mit dem Nullelement $(0, 0)$ und dem Einselement $(1, 0)$. Ein Unterkörper von \mathbb{C} ist der Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} . Die komplexen Zahlen sind algebraisch abgeschlossen, d.h. jedes Polynom $P(z)$ mit Koeffizienten aus dem Körper besitzt sämtliche Nullstellen im Körper.

Insbesondere gilt für die imaginäre Einheit:

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) \text{ , also } i^2 = -1 \tag{2.5}$$

Die konjugiert komplexe Zahl z^* (oder \bar{z} geschrieben) ist

$$z^* = (x, -y) = x - i y \tag{2.6}$$

Damit ergeben sich der Realteil und der Imaginärteil einer komplexen Zahl z zu:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \text{ , } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*) \tag{2.7}$$

Ferner ist

$$z_1 z_2^* = (x_1 x_2 + y_1 y_2, -x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

und

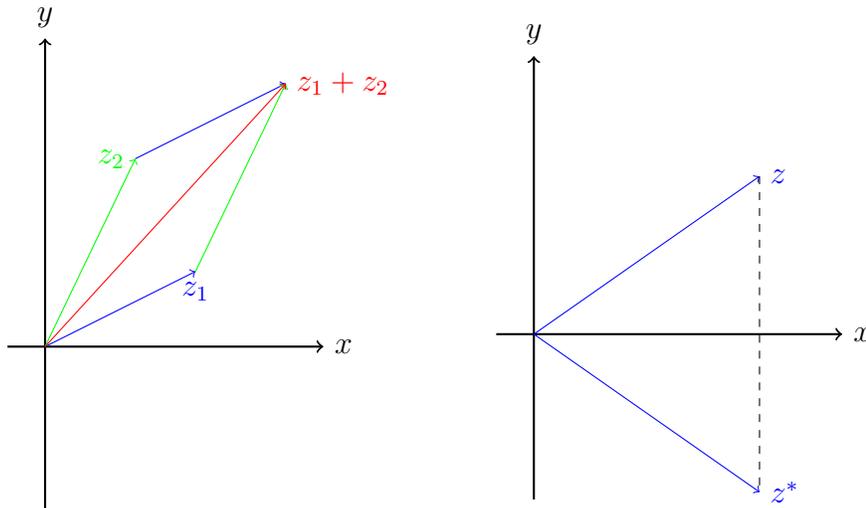
$$z z^* = (x^2 + y^2, 0)$$

Der Betrag einer komplexen Zahl

$$|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.8}$$

stättet den Vektorraum \mathbb{C} mit einer Norm aus. Diese Norm ist identisch mit der euklidischen Norm des \mathbb{R}^2 , d.h. der Raum \mathbb{C} besitzt dieselbe geometrische Struktur wie der \mathbb{R}^2 .

Eine nützliche geometrische Darstellung komplexer Zahlen erfolgt mit Hilfe komplexer Zahlenebene, auch Gaußsche Zahlenebene genannt.

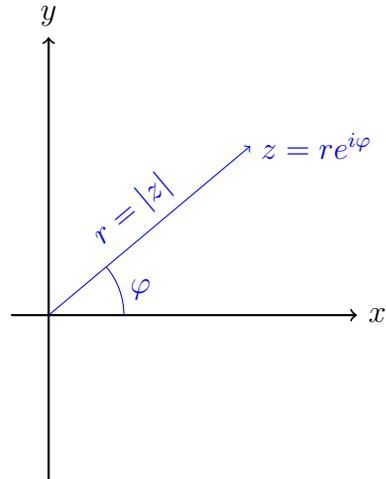


Führen wir in der komplexen Ebene ebene Polarkoordinaten (r, φ) ein, so folgt für eine komplexe Zahl z

$$x = r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi$$

und damit

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi} \quad (2.9)$$



wobei die Eulersche Formel

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \quad (2.10)$$

benutzt wurde. Für die Länge r und das Argument (oder Phase) φ gilt

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arg z \pmod{2\pi}. \quad (2.11)$$

Für zwei in Polarkoordinaten gegebenen komplexen Zahlen gilt:

$$z_1 = z_2 \quad \iff \quad r_1 = r_2 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (2.12)$$

Falls man den Winkelbereich nicht auf ein bestimmtes Intervall der Länge 2π einschränken will, so dürfen sich identische komplexe Zahlen im Argument um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden:

$$\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Die Menge aller komplexen Zahlen $\{z = r e^{i\psi} \mid r \geq 0, \psi \in \mathbb{R}\}$ wird dann durch folgende Äquivalenzrelation in Äquivalenzklassen

$$z = [r e^{i\varphi}] = \{r e^{i\psi} \mid \psi = \varphi + 2k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (2.13)$$

komplexer Zahlen eingeteilt. Den Wertebereich von φ nennt man den Hauptwert des Arguments; dieser Bereich hat die Länge 2π , kann aber verschiedene Bereiche umfassen: z.B. die Intervalle $[0, 2\pi)$ oder $(-\pi, \pi]$. In Hinblick auf den noch zu behandelnden Logarithmus werden wir das zweite Intervall verwenden.

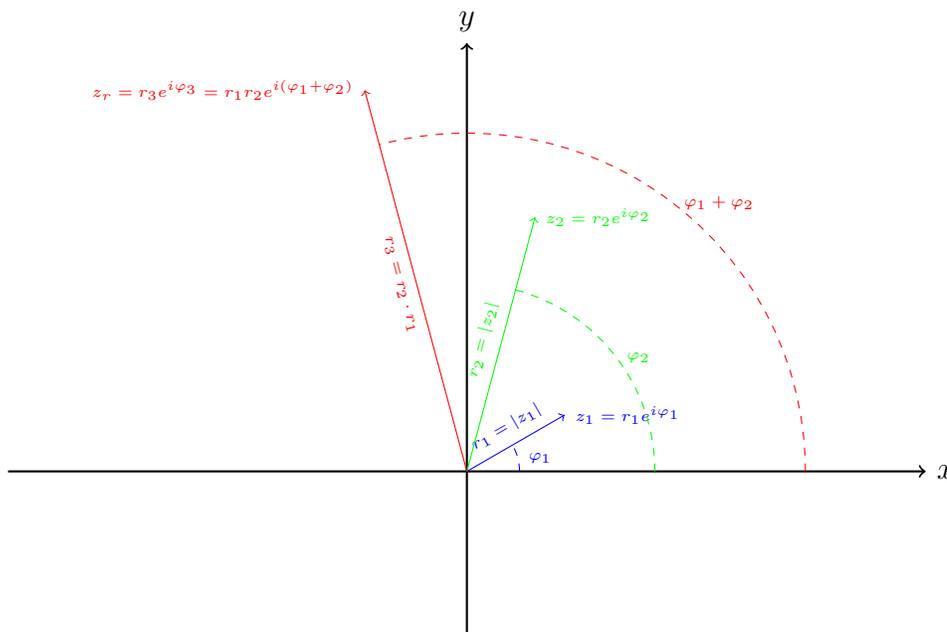
Multipliziert man zwei komplexe Zahlen in der Polarform ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2), \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

d.h.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{und} \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

In der Zahlenebene ergibt sich für die Multiplikation:



Die Division erfolgt analog:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad , \quad r_2 \neq 0. \quad (2.15)$$

Für Potenzen komplexer Zahlen gilt:

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.16)$$

Für $r = 1$ ergibt sich daraus unter Verwendung der Eulerschen Formel die Formel von de Moivre:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad (2.17)$$

Die bisherigen Operationen wie z.B. Multiplikation, Division und n -te Potenz sind eindeutig, d.h. bei der Wahl verschiedener Repräsentanten für die Äquivalenzklassen $[z], [z_1], [z_2]$ erhält man als Resultat dieselbe Äquivalenzklasse $[z_1 z_2], \left[\frac{z_1}{z_2} \right], [z^n]$.

Anders ist es mit den n -ten Wurzeln: Setzen wir nämlich an

$$\sqrt[n]{z} = (r e^{i\varphi})^{1/n} = \sqrt[n]{r} e^{i\varphi/n} \quad \text{mit} \quad \sqrt[n]{r} \geq 0 \quad (2.18)$$

so führt ein Unterschied von $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, 2(n-1)\pi$ im Argument von z zu einem jeweils anderen Resultat, sofern $z \neq 0$. Die Wurzeln sind nur dann gleich, wenn sich die Argumente zweier Repräsentanten von $[z]$ um ein ganzzahliges Vielfaches von $2n\pi$ unterscheiden. Es gibt daher zu einer komplexen Zahl $z = r e^{i\varphi}$ mit $z \neq 0$ n verschiedene n -te Wurzeln, d.h. sie ist

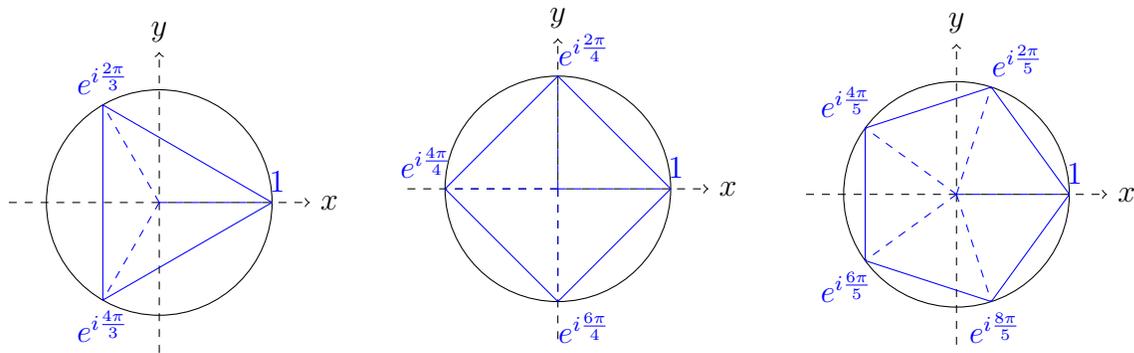


Abbildung 2.1: 3-, 4- und 5-te Einheitswurzel.

n -fach mehrdeutig (vgl. Kap. 2.1.4). Wählen wir speziell $\varphi \in [0, 2\pi)$, so lassen sich die Wurzeln schreiben als

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})} \quad (2.19)$$

mit $\sqrt[n]{r} \geq 0$; $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ und $w_k^n = z$. Sie liegen alle auf einem Kreis vom Radius $r^{1/n}$ und bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen n -Ecks (siehe Abb. 2.1). Aus $r = 1$ und $\varphi = 0$ folgt

$$\sqrt[n]{1} = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1\} = \begin{cases} 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{n}} \\ e^{i\frac{4\pi}{n}} \\ \vdots \\ e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} \end{cases}$$

Die Quadratwurzel lautet in der kartesischen Darstellung:

$$\sqrt{z} = \sqrt{x + iy} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} + x)} + \operatorname{sgn}(y)i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + y^2} - x)} \right),$$

wobei $\operatorname{sgn}(y)$ das Signum von y ist.

2.1.2 Folgen, Reihen, Funktionen

Die folgenden Definitionen sind analog zu denjenigen der reellen Analysis

Definition 2.2 (Konvergente Folge). *Eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass*

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n > n_0. \quad (2.20)$$

z wird der Grenzwert der Folge genannt.

Definition 2.3 (Cauchy-Folge). *Eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen heißt Cauchy-Folge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass*

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0. \quad (2.21)$$

Bemerkung: Wie im Reellen kann man zeigen, dass jede Cauchy-Folge eine konvergente Folge ist und umgekehrt. Dies erfolgt auf Basis des folgenden Satzes.

Satz 2.1. *Zerlegt man $z_n = (x_n, y_n)$ und $z = (x, y)$ in Real- und Imaginärteil, dann sind die Bedingungen*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad (2.22)$$

notwendig und hinreichend dafür, dass Gl. (2.20) gilt.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung in Gl. (2.22) folgt unmittelbar aus

$$|x_n - x| \leq |z_n - z| \quad \text{und} \quad |y_n - y| \leq |z_n - z|$$

Ist umgekehrt Gl. (2.22) erfüllt, so existiert eine Zahl $n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_0$$

Damit ist

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq |x_n - x| + |y_n - y| \leq \varepsilon \quad \forall n > n_0.$$

Damit ist gezeigt, dass die Bedingung in Gl. (2.22) auch hinreichend ist. ■

Bemerkung: Nach dem letzten Satz lassen sich alle Konvergenzaussagen aus der reellen Analysis ins Komplexe übertragen.

Definition 2.4 (Reihe). Sei $\{z_i\}$ eine Folge komplexer Zahlen. Man kann ihr eine Folge, die Folge der Partialsommen S_n mit

$$S_n = \sum_{i=0}^n z_i$$

zuordnen. Die Folge heißt auch die der Folge $\{z_i\}$ zugeordnete Reihe. Man bezeichnet sie symbolisch mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} z_i$$

Falls die Folge $\{S_n\}$ konvergiert, so nennt man

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \tag{2.23}$$

den Wert oder die Summe der Reihe.

Beispiel:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{für } |z| < 1$$

Definition 2.5 (Absolut konvergente Reihe). Eine Reihe

$$z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \dots$$

heißt absolut konvergent, falls die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = |z_0| + |z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots$$

konvergiert.

Definition 2.6 (Komplexe Funktion). Eine Abbildung

$$f : G \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \tag{2.24}$$

heißt komplex(wertig)e Funktion einer komplexen Variablen.

Ausgeschrieben in Real- und Imaginärteil lautet die Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned} z = (x, y) &\xrightarrow{f} w = f(z) = f(x, y) = (\operatorname{Re}(f(z)), \operatorname{Im}(f(z))) \\ &= (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned} \tag{2.25}$$

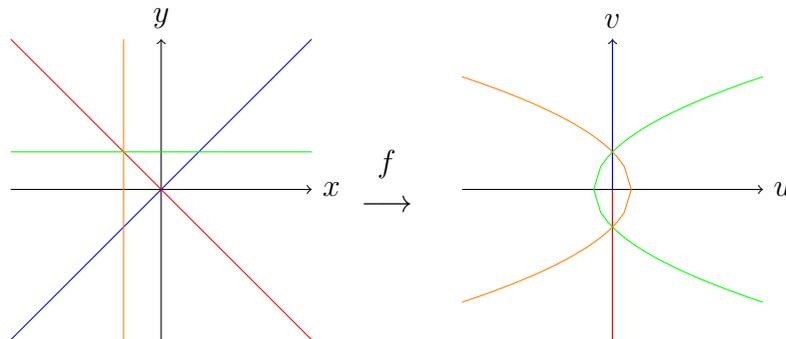
bzw.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

also nichts anderes als eine Abbildung des Typs $f : G \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Beispiel:

$$z = (x, y) \rightarrow f(z) = z^2 = (x^2 - y^2, 2i x y)$$



Definition 2.7 (Stetigkeit).

- Eine komplexe Funktion heißt stetig im Punkt $z_0 \in G$, wenn gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (2.27)$$

d.h., wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ existiert, sodass

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{für } |z - z_0| < \delta. \quad (2.28)$$

- f heißt stetig in G , wenn f in jedem Punkt $z_0 \in G$ stetig ist.
- f heißt gleichmäßig stetig, wenn dieses δ für alle $z_0 \in G$ nur von ε abhängt, d.h. $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Bemerkung: f ist genau dann stetig, wenn die beiden reellen Funktionen $\text{Re}(f(z)) = u(x, y)$ und $\text{Im}(f(z)) = v(x, y)$ stetig sind.

Beispiel: Die nachfolgende Funktion bildet die komplexe Ebene auf den Einheitskreis ab

$$f(z) = \frac{z^*}{z} \Rightarrow f(re^{i\varphi}) = e^{-2i\varphi}$$

Sie ist in jedem Punkt außer dem Nullpunkt stetig. Wenn man sich entlang $z = (x, 0)$ dem Nullpunkt nähert, d.h. $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$, erhält man,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f((x, 0)) = 1$$

während sich entlang $z = (0, y)$, d.h. $\varphi = \pi/2$ oder $\varphi = 3\pi/2$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f((0, y)) = -1$$

ergibt.

2.1.3 Elementare Funktionen

- Polynome n -ten Grades

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (2.29)$$

Sie haben genau n komplexe Nullstellen z_1, z_2, \dots, z_n (Vielfachheiten berücksichtigen!) und lassen sich damit gemäß

$$P_n(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i) \quad (2.30)$$

nach Primfaktoren zerlegen.

- Durch Division zweier teilerfremder Polynome $P_n(z)$ und $Q_m(z)$ erhält man rationale Funktionen

$$R_{n,m}(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \quad (2.31)$$

mit n Nullstellen und m Polstellen (siehe ??).

- Potenzreihe um z_0

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.32)$$

Sie konvergiert nach dem Wurzelkriterium absolut und gleichmäßig für alle z mit

$$|z| < \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \equiv R \quad (2.33)$$

d.h. innerhalb eines Kreises um z_0 mit dem Konvergenzradius R . Sind die a_n reell, so stimmt der Konvergenzradius R mit dem der reellen Reihe überein. Weiter gilt, falls alle a_n reell sind, dass

$$P(z^*) = P^*(z)$$

- Die Exponentialfunktion ist folgendermaßen definiert:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ mit } R = \infty \quad (2.34)$$

Es folgt nach geeigneten Umordnungen

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \quad (2.36)$$

und mit $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m y^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m y^{2m+1}}{(2m+1)!} = \cos y + i \sin y$

$$\text{folgt } e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (2.37)$$

Bzgl. y ist die Funktion e^z also periodisch. Aus

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x > 0$$

folgt, dass e^z keine Nullstellen besitzt und für $x \rightarrow \infty$ divergiert.

- Die trigonometrischen Funktionen sind wie im Reellen durch

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \pm \dots \quad R = \infty, \quad (2.38)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \pm \dots \quad R = \infty, \quad (2.39)$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad (2.40)$$

definiert. Es gilt:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}) = 1. \quad (2.41)$$

Außerhalb der reellen Achse existieren keine Nullstellen:

$$\cos z = 0 \leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \leftrightarrow e^{2iz} = -1 \leftrightarrow z = k\pi/2 \text{ mit } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

$$\sin z = 0 \leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \leftrightarrow e^{2iz} = 1 \leftrightarrow z = k\pi \text{ mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Die Hyperbelfunktionen werden analog definiert, d.h.

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad , \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad (2.42)$$

und es gilt

$$\cosh(iz) = \cos(z) \text{ bzw. } \sinh(iz) = -i \sin(z) \quad (2.43)$$

2.1.4 Mehrdeutigkeit, Riemannsche Blätter, Riemannsche Fläche

Wir haben schon in Kap. 2.1.1 festgestellt, dass es für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ ($z \neq 0$) n verschiedene n -te Wurzeln gibt. Damit wird die Abbildung

$$z \longrightarrow \sqrt[n]{z} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.44)$$

n -fach mehrdeutig. Im Folgenden werden wir einige grundlegende, einführende Überlegungen anstellen, wie man eindeutige Funktionen erhalten kann. Dies führt uns auf sogenannte Riemannsche Blätter und der Riemannschen Flächen. Präziserer Darstellungen finden sich in [4, 8]. Für die saubere Definitionen benötigt man den Begriff der Mannigfaltigkeit, der über den Rahmen dieser Vorlesung hinausgeht.

Die Logarithmus-Funktion wird im Komplexen ebenfalls zu einer (sogar unendlich) mehrdeutigen „Funktion“: Aus $z = re^{i\psi} = e^{\ln r + i\psi}$ ($r > 0$) folgt

$$\ln z = \ln r + i\psi \quad z \neq 0 \quad (2.45)$$

Unterscheiden sich nun zwei Repräsentanten von $[z]$ um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π , so differieren ihre Logarithmen im Imaginärteil um gerade diesen Wert. Jeder Repräsentant von $[z]$ führt daher zu einem anderen Bild, sodass es zu einer komplexen Zahl $z = re^{i\psi}$ ($r > 0$) abzählbar unendlich viele verschiedene Logarithmen gibt. Dies eine Konsequenz der Periodizität der Exponentialfunktion entlang der imaginären Achse, siehe Gl. (2.37).

Wählen wir speziell $\varphi \in (-\pi, \pi]$, so lassen sich alle diese Logarithmen schreiben als

$$w_k = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.46)$$

mit $e^{w_k} = z \neq 0$. Damit wird die Abbildung $z \rightarrow \ln z$ ∞ -fach mehrdeutig. Diese Mehrdeutigkeit des Logarithmus überträgt sich auch auf Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten, die gemäß

$$z^a := e^{a \ln z} \text{ mit } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad , \quad z \neq 0 \quad (2.47)$$

definiert sind.

Der Funktionsbegriff setzt streng genommen Eindeutigkeit voraus. Es stellt sich daher die Frage, wie dies bewerkstelligt werden kann. Dafür gibt es grundsätzlich zwei Methoden:

1. Hauptwert

Man greift von den Bildern w_0, w_1, \dots willkürlich eins (im allgemeinen das einfachste), z.B. w_0 , heraus und läßt es als einziges Bild genannt Hauptwert zu:

$$z \rightarrow w_0 \quad (2.48)$$

Zum Beispiel erhält man den Hauptzweig des Logarithmus, in dem man den Streifen

$$S = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(w) \leq \pi\}$$

nimmt und diesen als Definitionsbereich für die Exponentialfunktion nimmt:

$$\begin{aligned} \exp : S &\rightarrow \mathbb{C}/\{(0,0)\} \\ w &\rightarrow e^w \end{aligned}$$

Damit existiert zu jedem $z \in \mathbb{C}/\{(0,0)\}$ eine eindeutig bestimmte Zahl $w \in S$ mit der Eigenschaft $e^w = z$. Diese Zahl w ist der Hauptwert des Logarithmus:

$$w = \ln z$$

Diese Methode des Eindeutigmachens einer mehrdeutigen „Funktion“ bringt aber auch mehrere Nachteile mit sich:

- (a) die Abbildung wird nicht in ihrer vollen Vielfalt erfaßt
- (b) die Auswahl eines Bildes geschieht völlig willkürlich
- (c) die Funktion wird entlang gewisser „Sprunglinien“ unstetig

2. Verzweigungsschnitte, Riemannsche Blätter, Riemannsche Fläche

Bezüglich der n -ten Wurzel z.B. spaltet die Äquivalenzklasse

$$[z = re^{i\varphi}] = \{re^{i(\varphi+2k\pi)} \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad \varphi \in [0, 2\pi), r > 0 \quad (2.49)$$

in n Teilmengen auf:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{(1)} &= \{re^{i(\varphi+2nk\pi)} \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ \mathbb{C}_{(2)} &= \{re^{i(\varphi+2\pi+2nk\pi)} \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ \mathbb{C}_{(3)} &= \{re^{i(\varphi+4\pi+2nk\pi)} \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ &\vdots \\ \mathbb{C}_{(n)} &= \{re^{i(\varphi+2(n-1)\pi+2nk\pi)} \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Diese verschiedenen komplexen Ebenen $\mathbb{C}_{(1)}, \mathbb{C}_{(2)}, \dots, \mathbb{C}_{(n)}$ werden Riemannsche Blätter genannt. Die Idee ist nun die Riemannschen Blätter so zu „verkleben“, dass man das Definitionsgebiet vergrößert und darauf die Funktion f , z.B. die n -te Wurzel, eindeutig definieren kann. Das erhaltene Definitionsgebiet ist eine Riemannsche Fläche, welches ein Beispiel einer Mannigfaltigkeit darstellt.

Beispiel Quadratwurzel: In diesem Fall werden zwei komplexe Ebenen mit bzgl. f verschiedenen Zahlen übrig:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{(1)} &= \{z_{(1)} = re^{i\varphi} \mid r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)\} \\ \mathbb{C}_{(2)} &= \{z_{(2)} = re^{i(\varphi+2\pi)} \mid r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)\} \end{aligned}$$

Betrachten wir auf jeder dieser Ebenen die Abbildungen

$$f : \mathbb{C}_{(i)} \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.51)$$

$$re^{i\psi} \rightarrow \sqrt{r}e^{i\psi/2} \in \mathbb{C} \quad (2.52)$$

für sich, so erhält man jeweils einen anderen Hauptwert. Dabei ergibt sich bei einem vollen Umlauf von $z_{(i)}$ das folgende Verhalten der Bilder

Skizze

mit der positiv reellen Achse als Sprunglinie.

Betrachten wir die beiden Bilder zusammen, so ergibt sich automatisch, wie wir $\mathbb{C}_{(1)}$ und $\mathbb{C}_{(2)}$ zum Gesamtdefinitionsbereich von f zusammenfügen müssen, um keine künstlichen Unstetigkeiten zu bekommen: Nach einem Umlauf von 2π in $\mathbb{C}_{(1)}$ dürfen wir nicht die reelle Achse innerhalb von $\mathbb{C}_{(1)}$ durchstoßen (damit würden wir uns die Unstetigkeit einhandeln), sondern laufen einfach – der Größe des Winkels folgend – auf $\mathbb{C}_{(2)}$ weiter, nach weiteren 2π müssen wir wieder auf $\mathbb{C}_{(1)}$ zurückspringen.

Als Ergebnis erhalten wir eine eindeutige Gesamtfunktion ohne künstliche Unstetigkeitsstellen. Dazu können wir uns die beiden Riemannschen Blätter lose aufeinandergelegt und in der beschriebenen Weise längs der Sprunglinie, d.h. der positiv reellen Achse zusammengeheftet denken. Genau beim Überqueren dieses sogenannten Verzweigungsschnittes müssen die Blätter gewechselt werden.

Analog gibt es bei der n -ten Wurzel n Riemannsche Blätter: nach einem vollen Umlauf auf dem i -ten Blatt wechselt man entlang des Verzweigungsschnittes auf das $i+1$ -te Blatt. Nach einem vollen Umlauf auf dem n -ten Blatt springt man auf das 1. Blatt (identifiziert mit dem $(n+1)$ -ten Blatt) zurück.

Bemerkung: Die Lage der Verzweigungsschnittes ist nicht eindeutig. Man hätte in dem obigen Beispiel auch die negative reelle Achse oder eine andere vom Nullpunkt ausgehende Gerade ins Unendliche nehmen können. Möglich ist auch jede einfache Kurve, die den Ursprung mit dem Unendlichen verbindet. Der Nullpunkt ist ein sogenannter Verzweigungspunkt.

Bereits im Falle von Wurzeln von Polynomen, wie z.B. $f(z) = \sqrt{(z^2+1)(z-1)}$ erhält man komplizierte Strukturen, siehe z.B [8] Kapitel 5. Wir begnügen uns hier deshalb mit einer grundlegenden Definition gefolgt von einer Vorschrift.

Definition 2.8 (Verzweigungspunkt). *Ein (endlicher) Verzweigungspunkt einer mehrdeutigen Abbildung ist eine komplexe Zahl $z_0 \in \mathbb{C}$, bei der bei einem vollen Umlauf ($z = z_0 + \varrho e^{i\varphi}$; $\varphi \in [0, 2\pi)$; $\varrho \rightarrow 0$) der Wert der Abbildung nicht zu seinem Anfangswert zurückkehrt.*

Eine mehrdeutige Abbildung f besitzt im Unendlichen einen Verzweigungspunkt, wenn

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2.53}$$

einen Verzweigungspunkt bei $z_0 = 0$ besitzt.

Beispiele:

1. $\sqrt[n]{z}$ und $\ln z$ haben genau einen (endlichen) Verzweigungspunkt $z_0 = 0$. Bei einem vollen Umlauf um eine komplexe Zahl $a \neq 0$

$$z = a + \varrho e^{i\varphi} \quad \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 2\pi$$

kehrt das Argument von z zu seinem Ausgangswert zurück, sobald der Nullpunkt außerhalb des geschlossenen Weges liegt.

2. $\sqrt[n]{z-a}$ und $\ln(z-a)$ haben im Unendlichen einen Verzweigungspunkt, da

$$\sqrt[n]{\frac{1}{z}-a} = \frac{1}{\sqrt[n]{z}} \sqrt[n]{1-az} \text{ und } \ln\left(\frac{1}{z}-a\right) = \ln(1-az) - \ln z$$

einen Verzweigungspunkt bei $z_0 = 0$ besitzen.

Vorschrift für Schnitte: Um eine mehrdeutige Abbildung eindeutig zu machen, müssen die Verzweigungspunkte (im Endlichen und Unendlichen) durch einfache Kurven, sogenannte Verzweigungsschnitte, so miteinander verbunden werden, dass jeder Verzweigungspunkt mindestens einmal Endpunkt eines solchen Schnittes ist.

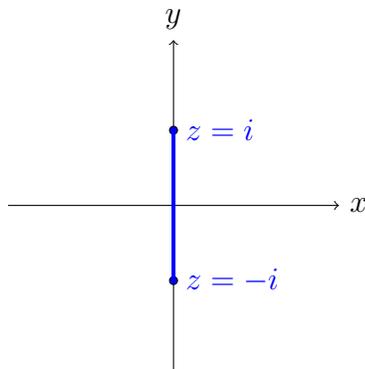
Beispiel: $\sqrt{z^2+1} = \sqrt{(z+i)(z-i)}$ besitzt Verzweigungspunkte im Endlichen bei

$$z = -i \text{ und } z = i$$

$z = -i$ und im Unendlichen haben zwar $\sqrt{z+i}$ und $\sqrt{z-i}$ jeweils einen Verzweigungspunkt, nicht jedoch $\sqrt{z^2+1}$, da

$$\sqrt{\frac{1}{z^2}+1} = \frac{1}{z} \sqrt{1+z^2}$$

keinen Verzweigungspunkt bei $z_0 = 0$ besitzt.



Verzweigungsschnitt von $\sqrt{z^2+1}$

2.1.5 Analytische Funktionen

Definition 2.9. *Eine Funktion*

$$f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \tag{2.54}$$

heißt komplex differenzierbar (oder komplex ableitbar im Punkt $z_0 \in G$ falls der Limes

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2.55}$$

existiert. Man bezeichnet den Grenzwert, falls er existiert, mit $f'(z_0)$.

Eine äquivalente Definition der Differenzierbarkeit erfolgt wie Falle des \mathbb{R}^2 (oder allgemeiner des \mathbb{R}^n): Ist eine komplexe Funktion $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben und $z_0 \in G$, so versuchen wir, f in der Umgebung von z_0 komplex-linear zu approximieren:

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + h(z)(z - z_0), \quad (2.56)$$

wobei a ein endlicher komplexer Wert ist und für $h(z)$ gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = h(z_0) = 0 \quad (2.57)$$

Ist Gl. (2.57) erfüllt, so ergibt sich aus Gl. (2.56):

$$a = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (2.58)$$

d.h. wenn die Funktion f im Punkte z_0 komplex-linear approximierbar ist, so ist a eindeutig bestimmt. In diesem Fall ist $a = f'(z_0)$.

Bemerkungen: es gilt wie im Reellen

- Eine in z_0 ableitbare Funktion ist in z_0 stetig.
- Die Funktionen $f, g : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ seien in z_0 differenzierbar, dann sind mit $\lambda \in \mathbb{C}$ auch

$$f + g, \quad \lambda f, \quad fg \text{ und } \frac{1}{f} \text{ (falls } f(z_0) \neq 0 \text{)}$$

komplex differenzierbar und es gilt

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \quad (\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0) \quad (2.59)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = \frac{-f'(z_0)}{f(z_0)^2} \quad (2.60)$$

- Kettenregel: Die Funktionen

$$f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ und } g : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.61)$$

seien zusammensetzbar, d.h. $f(G) \subset D$. Weiter sei f in $z_0 \in G$ und g in $f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann ist die Zusammensetzung

$$\begin{aligned} g \circ f : G &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\rightarrow g(f(z)) \end{aligned} \quad (2.62)$$

in $z = z_0$ komplex differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \quad (2.63)$$

Man differenziert wie im Reellen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$f(z) = z^n \Rightarrow f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1} \quad (2.64)$$

Definition 2.10. $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt analytisch oder auch holomorph im Gebiet G , wenn f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist.

Bemerkung: Die Differenzierbarkeit stellt im Komplexen eine viel schärfere Forderung dar als im Reellen; so ist z.B. eine einmal differenzierbare Funktion automatisch beliebig oft differenzierbar (vgl. Kap. 2.2.3).

2.1.6 Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen

Ausgehend von

$$f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.65)$$

$$: G \subset \mathbb{C} \rightarrow f(z) = (u(x, y), v(x, y)) \quad (2.66)$$

und der Annahme dass f analytisch ist verwenden wir die Tatsache, dass ein Grenzwert in $z_0 \in G$, falls er existiert, unabhängig von der Richtung ist, in der man z_0 erreicht. Sie nun $h \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0), v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0))}{h} \\ &= (u_x(x_0, y_0), v_x(x_0, y_0)) \end{aligned} \quad (2.68)$$

mit der Notation

$$u_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \quad (2.69)$$

Analog zeigt man

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = \frac{1}{i} (u_y(x_0, y_0), v_y(x_0, y_0)) \quad (2.70)$$

Da in beiden Fällen dasselbe Ergebnis gegeben sein muss, folgt, dass die reellen Funktionen u und v partiell differenzierbar sind, wobei

$$u_x = v_y \text{ und } u_y = -v_x \quad (2.71)$$

Dies sind die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen (C-R DGL). Es gilt also

Satz 2.2.

Falls f mit $f(z) = (u(x, y), v(x, y))$ in $z_0 = (x_0, y_0)$ komplex differenzierbar ist, dann existieren in $z_0 = (x_0, y_0)$ die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y und erfüllen dort die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen.

Sind die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ reell (man sagt auch total) differenzierbar und gelten die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen in $z_0 = (x_0, y_0)$ mit den stetigen partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y dann folgt, daß $f(z) = (u(x, y), v(x, y))$ in $z_0 = (x_0, y_0)$ komplex differenzierbar ist.

Beispiele:

- Exponentialfunktion (vom Reellen aus gesehen)

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} u_x &= e^x \cos y & u_y &= -e^x \sin y \\ v_x &= e^x \sin y & v_y &= e^x \cos y \end{aligned} \right\} \text{ stetig, C-R DGL } \checkmark \\ \Rightarrow f'(z) &= e^x(\cos y + i \sin y) = e^z \end{aligned}$$

Damit folgt auch in Kombination mit dem vorher Gesagten, dass für die trigonometrischen Funktionen und die Hyperbelfunktionen dieselben Ableitungsregeln wie im Reellen gelten.

- Logarithmus-Funktion (vom Reellen aus gesehen)

$$\begin{aligned} f(z) &= \ln z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ mit } z \neq 0 \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} u_x &= \frac{x}{x^2+y^2} & u_y &= \frac{y}{x^2+y^2} \\ v_x &= \frac{1}{1+(y/x)^2} \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} & v_y &= \frac{1}{1+(y/x)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned} \right\} \text{ stetig, C-R DGL } \checkmark \\ \Rightarrow f'(z) &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Dieses Ergebniss gilt für den in Kap. 2.1.4 definierten Hauptzweig des Logarithmus (allerdings muss das Gebiet S auf die offene Menge $-\pi < \text{Im}(z) < \pi$ eingeschränkt werden).

- $f(z) = \text{Re}(z) = x$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} u_x &= 1 & u_y &= 0 \\ v_x &= 0 & v_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ stetig, aber C-R DGL nicht erfüllt}$$

Damit ist diese Funktion nicht komplex differenzierbar. Analoges gilt für $f(z) = \text{Im}(z)$.

- $f(z) = z^* = x - iy$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} u_x &= 1 & u_y &= 0 \\ v_x &= 0 & v_y &= -1 \end{aligned} \right\} \text{ stetig, aber C-R DGL nicht erfüllt}$$

Damit ist diese Funktion nicht komplex differenzierbar. Analog kann man zeigen, dass $f(z) = (z^*)^n = (z^n)^*$ zwar stetig aber nicht komplex differenzierbar ist.

- $f(z) = zz^* = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} u_x &= 2x & u_y &= 2y \\ v_x &= 0 & v_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ stetig, aber C-R DGL nicht erfüllt}$$

Damit ist diese Funktion nicht komplex differenzierbar.

Satz 2.3.

f ist genau dann komplex differenzierbar, wenn f nur von z aber nicht von z^* abhängt.

Bemerkung: $\operatorname{Re}(z) = (z + z^*)/2$, $\operatorname{Im}(z) = (z - z^*)/(2i)$. Analog sind Funktionen, die nur von z^* abhängen nach z^* komplex differenzierbar.

Definition 2.11. Eine Funktion u heißt harmonisch (oder auch Potentialfunktion), falls sie zweimal stetig differenzierbar ist und die Laplace-Gleichung

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2.72)$$

erfüllt. Δ wird auch Laplace-Operator genannt.

Satz 2.4. Ist f komplex differenzierbar und sind u und v zweimal stetig differenzierbar, dann sind u, v harmonische Funktionen.

Beweis:

$$\begin{aligned} f &= u + i v \\ u_x &= v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x \\ \Rightarrow u_{xx} &= v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy} \\ \Rightarrow \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = 0 \end{aligned}$$

Der Beweis, dass $\Delta v = 0$ gilt, geht analog. ■

Bemerkung: Wir werden in Kap. 2.2.3 sehen, dass u und v zweimal stetig differenzierbar sind und dies nicht extra gefordert werden muss.

Satz 2.5. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein offenes achsenparalleles Rechteck und $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Potentialfunktion. Dann existiert eine analytische Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit Realteil u .

Beweis siehe [3], Kapitel I.5. f ist bis auf eine rein imaginäre Konstante eindeutig bestimmt. Eine harmonische Funktion $v : G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine zu u konjugiert harmonische Funktion. Sie ist bis auf eine additive reelle Konstante eindeutig bestimmt. Der Satz gilt allgemeiner für einfach zusammenhängende Gebiete $G \subset \mathbb{C}$.

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen haben auch eine geometrische Konsequenz, denn es gilt der

Satz 2.6. Es sei $f : G \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dann stehen die Kurvenscharen $u(x, y) = c_1$ und $v(x, y) = c_2$ orthogonal aufeinander.

Beweis: Aus der Kurvenschar $u(x, y)$ nehmen wir eine spezielle Kurve C_1 heraus. Wegen

$$\frac{d}{dx} u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

ist der Anstieg dieser Kurve C_1

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{C_1} = - \frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial y}$$

Analog folgt für eine spezielle Kurve C_2

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2} = -\frac{\partial v}{\partial x} / \frac{\partial v}{\partial y}$$

Aufgrund der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen gilt für das Produkt der beiden Anstiege am selben Punkt $z = (x_0, y_0)$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1}(z) \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}(z) = -1$$

Dies bedeutet aber, daß beide Kurven senkrecht aufeinander stehen. ■

2.2 Integration

2.2.1 Kurvenintegrale

Die geeignete Verallgemeinerung des Integrals im Reellen über ein Intervall der reellen Achse stellen Kurvenintegrale dar. Da eine Kurve in \mathbb{C} nichts anderes als eine Kurve in \mathbb{R}^2 ist, können diese Kurvenintegrale in \mathbb{C} auf reelle Integrale zurückgeführt werden.

Definition 2.12 (Kurve). Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Eine Kurve γ ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}, \tag{2.73}$$

d.h. eines reellen Intervalls in die komplexe Ebene.

Beispiele

- Die Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten z_1 und z_2

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow \gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

- Der k -fach durchlaufene Einheitskreis

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow \gamma(t) = e^{2\pi i k t} \end{aligned}$$

Definition 2.13 (glatt, stückweise glatt). Eine Kurve γ heißt glatt, falls sie stetig differenzierbar ist.

Eine Kurve γ heißt stückweise glatt, falls eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

gibt, sodass die Einschränkungen

$$\gamma_i \equiv \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]} \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

glatt sind.

Definition 2.14 (Kurvenintegral). *Es sei*

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

eine glatte Kurve und

$$f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion, in deren Definitionsbereich die Kurve γ verläuft, d.h. $\gamma \subset G$. Dann ist das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f \equiv \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad (2.74)$$

Falls γ stückweise glatt ist ergibt sich mit obiger Zerlegung

$$\int_{\gamma} f = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma_i(t)) \gamma_i'(t) dt \quad (2.75)$$

Die Bogenlänge $l(\gamma)$ einer glatten Kurve γ ist durch

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (2.76)$$

gegeben und die einer stückweise glatten Kurve durch

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^n l(\gamma_i) \quad (2.77)$$

Die Eigenschaften reeller Kurvenintegrale übertragen sich auf komplexe Kurvenintegrale:

1. Linearität: $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma} (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)) dz = c_1 \int_{\gamma} f_1(z) dz + c_2 \int_{\gamma} f_2(z) dz \quad (2.78)$$

2. Gilt $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in C$, so gilt die „Standardabschätzung“

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M l(\gamma) \quad (2.79)$$

3. Transformationsinvarianz des Kurvenintegrals (unabhängig von der Parametrisierung)
 Es seien $\gamma : [c, d] \rightarrow G$ eine stückweise glatte Kurve und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma \in G$ eine stetige Funktion sowie $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ \varphi} f(\zeta) d\zeta \quad (2.80)$$

4. Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, welche eine Stammfunktion F besitzt ($F' = f$), dann gilt für jede in G verlaufende Kurve γ

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad (2.81)$$

Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt. Aus der letzten Eigenschaft folgt sofort nachstehender Satz.

Satz 2.7. Falls eine stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (2.82)$$

für jede in G verlaufende geschlossene, stückweise glatte Kurve γ .

Beispiel: Wir betrachten die Kurve $\gamma(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, d.h. einen Kreis um den Mittelpunkt mit Radius r . Es sei $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{r^n e^{int}}_{z^n} \underbrace{re^{it} i dt}_{dz} = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases} \quad (2.83)$$

Folgerung: Im Gebiet $G = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ besitzt die (stetige) Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

keine Stammfunktion. Dies ist eine Folge der Mehrdeutigkeit des Logarithmus. Der Werte $2\pi i$ entspricht genau der Unstetigkeit, wenn man den Kreisumfang einmal durchquert.

2.2.2 Cauchyscher Integralsatz

Annahme: Im Folgenden wird angenommen, dass Kurven, entlang derer integriert wird, stückweise glatt sind.

Definition 2.15. Eine Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt bogenweise zusammenhängend, falls es zu je zwei Punkten $z, w \in D$ eine ganz in D verlaufende stückweise glatte Kurve existiert, welche z mit w verbindet

$$\gamma : [a, b] \rightarrow D \text{ mit } \gamma(a) = z \text{ und } \gamma(b) = w. \quad (2.84)$$

Definition 2.16. Ein Gebiet ist eine bogenweise zusammenhängende offene Menge $G \subset \mathbb{C}$.

Satz 2.8. Für eine im Gebiet G stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sind folgende drei Aussagen gleichbedeutend

1. f besitzt eine Stammfunktion
2. Das Integral von f über jede in G verlaufende geschlossene Kurve verschwindet.
3. Das Integral von f über jede in G verlaufende Kurve hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab.

Für den Beweis siehe [3], Kapitel II.2.

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei Punkte der komplexen Ebene. Die von diesen Punkten aufgespannte Dreiecksfläche ist die Punktmenge

$$\Delta \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3, \quad 0 \leq t_1, t_2, t_3, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1\}. \quad (2.85)$$

Dies ist die kleinste konvexe Menge, welche z_1, z_2 und z_3 enthält. Unter dem Dreiecksweg

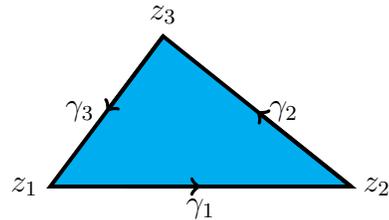
$$\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$$

verstehen wir die geschlossene Kurve

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= z_1 + t(z_2 - z_1), & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2(t) &= z_2 + (t-1)(z_3 - z_2), & 1 \leq t \leq 2 \\ \gamma_3(t) &= z_3 + (t-2)(z_1 - z_3), & 2 \leq t \leq 3 \end{aligned}$$



Satz 2.9 (Cauchy'scher Integralsatz für Dreieckswege). Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Seien $z_1, z_2, z_3 \in G$, sodass die von ihnen aufgespannte Dreiecksfläche ganz in G liegt. Dann gilt;

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(z) dz = 0. \quad (2.86)$$

Beweis: Wir konstruieren induktiv eine Folge von Dreieckswegen ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$\gamma^{(n)} = \langle z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)} \rangle$$

mit folgenden Eigenschaften

1. $\gamma^{(0)} = \gamma = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$

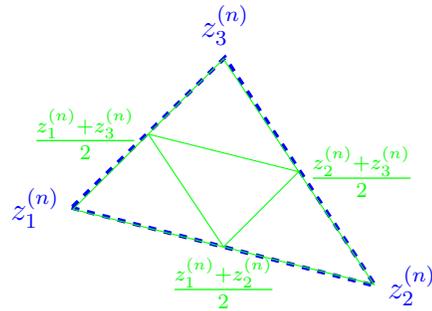
2. $\gamma^{(n+1)}$ ist einer der vier folgenden Dreieckswege

$$\gamma_1^{(n)} = \left\langle \frac{z_1^{(n)} + z_2^{(n)}}{2}, z_2^{(n)}, \frac{z_2^{(n)} + z_3^{(n)}}{2} \right\rangle$$

$$\gamma_2^{(n)} = \left\langle \frac{z_2^{(n)} + z_3^{(n)}}{2}, z_3^{(n)}, \frac{z_1^{(n)} + z_3^{(n)}}{2} \right\rangle$$

$$\gamma_3^{(n)} = \left\langle \frac{z_1^{(n)} + z_3^{(n)}}{2}, z_1^{(n)}, \frac{z_1^{(n)} + z_2^{(n)}}{2} \right\rangle$$

$$\gamma_4^{(n)} = \left\langle \frac{z_1^{(n)} + z_2^{(n)}}{2}, \frac{z_2^{(n)} + z_3^{(n)}}{2}, \frac{z_1^{(n)} + z_3^{(n)}}{2} \right\rangle$$



Es gilt

$$\int_{\gamma^{(n)}} f(z) dz = \int_{\gamma_1^{(n)}} f(z) dz + \int_{\gamma_2^{(n)}} f(z) dz + \int_{\gamma_3^{(n)}} f(z) dz + \int_{\gamma_4^{(n)}} f(z) dz$$

Wir wählen $\gamma^{(n+1)}$ so, dass

$$\left| \int_{\gamma^{(n)}} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\gamma^{(n+1)}} f(z) dz \right|$$

gilt und damit

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma^{(n)}} f(z) dz \right|$$

Die (abgeschlossenen) Dreiecksflächen $\Delta^{(n)}$ sind ineinander geschachtelt

$$\Delta = \Delta^{(0)} \supset \Delta^{(1)} \supset \Delta^{(2)} \supset \dots$$

Nach dem allgemeinen Intervallschachtelungsprinzip gibt es einen Punkt z_0 , der all diesen Flächen gemeinsam ist. In diesem Punkt werden die Differenzierbarkeit ausnutzen:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \underbrace{h(z)(z - z_0)}_{= r(z)}$$

mit $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$

Da $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ eine Stammfunktion besitzt, folgt mit Satz 2.8

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^{(n)}} f(z) dz &= \int_{\gamma^{(n)}} r(z) dz \\ \Rightarrow \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\gamma^{(n)}} r(z) dz \right| \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$\begin{aligned} |h(z)| &\leq \varepsilon \quad \forall z \in G \text{ mit } |z - z_0| < \delta \\ \Rightarrow |r(z)| &\leq \varepsilon |z - z_0| \quad \forall z \in G \text{ mit } |z - z_0| < \delta \end{aligned}$$

Wähle nun n so groß, dass $\Delta^{(n)} \subset U_\delta(z_0)$. Weiter gilt

$$|z - z_0| \leq l(\gamma^{(n)}) = \frac{1}{2^n} l(\gamma)$$

Damit erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\gamma^{(n)}} h(z)(z - z_0) dz \right| \leq 4^n l(\gamma^{(n)}) \varepsilon l(\gamma^{(n)}) = (l(\gamma))^2 \varepsilon$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

■

Bemerkung: Dieses Resultat läßt sich sofort auf Polygonzüge übertragen, da man diese in Dreiecke zerlegen kann.

Definition 2.17. Ein Sterngebiet ist eine offen Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft: Es existiert ein Punkt $z_* \in D$, sodass mit jedem Punkt $z \in D$ auch die gesamte Verbindungsstrecke zwischen z_* und z in D enthalten ist:

$$\{z_* + t(z - z_*); t \in [0, 1]\} \subset D \quad (2.87)$$

Der Punkt z_* heißt (möglicher) Sternmittelpunkt.

Bemerkung: z_* ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Da man je zwei Punkte eines Sterngebietes über z_* miteinander verbinden kann, sind Sterngebiete auch bogenweise zusammenhängend.

Beispiele

1. Jedes konvexe Gebiet in \mathbb{C} , z.B. offene Kreisscheiben, sind Sterngebiete.
2. Die längs der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene ist ein Sterngebiet. (mögliche Sternmittelpunkte sind alle Punkte auf der positiven reellen Achse mit $x > 0$ und nur diese)

3. $D = \mathbb{C} \setminus (0, 0)$ ist kein Sterngebiet: falls z_* ein Sternmittelpunkt wäre, gibt es keine Verbindungsstrecke mit $-z_*$.
4. Ringgebiete mit $0 < r < R$

$$R = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$$

sind keine Sterngebiete.

Satz 2.10 (Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete). G sei ein Sterngebiet.

1. Fassung: Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann verschwindet das Integral von f längs jeder in G verlaufenden geschlossenen Kurve.

2. Fassung: Jede analytische Funktion f auf G besitzt eine Stammfunktion in G .

Für den Beweis siehe [3], Kapitel II.2.

Folgerung: Jede in einem beliebigen Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ analytische Funktion f besitzt wenigstens lokal eine Stammfunktion, d.h. zu jedem Punkt $a \in G$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset G$ von a , sodass $f|_U$ eine Stammfunktion besitzt.

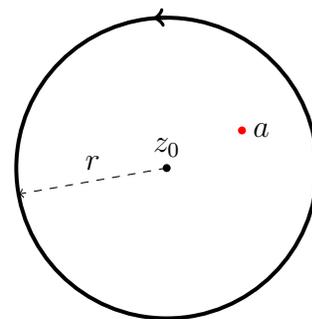
Satz 2.11. Sei D ein Sterngebiet mit Sternmittelpunkt z_* und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wenn f in allen Punkten $z \neq z_*$ komplex differenzierbar ist, besitzt f schon eine Stammfunktion in D .

2.2.3 Cauchy'sche Integralformel

Satz 2.12.

γ sei die Kurve $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, a liege im Inneren des Kreises, d.h. $|a - z_0| < r$. Es gilt

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i. \quad (2.88)$$

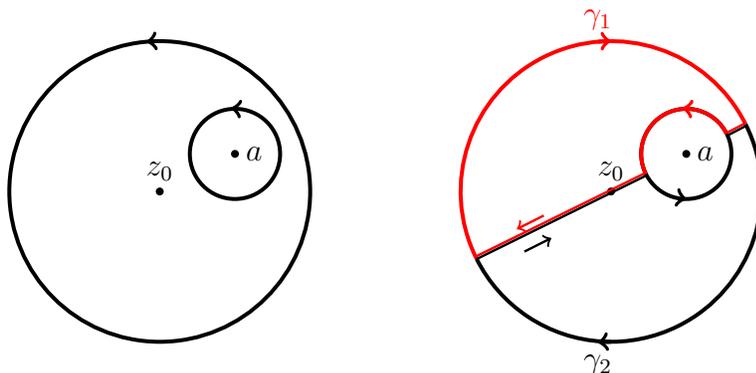


Den Fall $a = z_0$ haben wir am Ende von Kap. 2.2.1 behandelt. Mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes kann man obigen Satz auf diesen Fall zurückführen, d.h. man kann zeigen, dass

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = \oint_{|\zeta - a| = \rho} \frac{d\zeta}{\zeta - a}$$

mit $\rho \leq r - |z_0 - a|$.

Beweisidee:



Innerhalb der Kurven γ_1 (rote Kurve) und γ_2 (schwarze Kurve) ist die Funktion $f(z) = \frac{1}{z-a}$ analytisch, d.h. in den Gebieten, die von je einer der beiden Kurven umschlossen wird, verschwindet das Integral über $f(z)$, d.h.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a} dz &= 0 = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-a} dz \\ \Rightarrow 0 &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a} dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-a} dz = \int_{2\pi}^0 \underbrace{\frac{1}{re^{it}-a}}_z \underbrace{d(re^{it})}_{dz} + \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{a+re^{it}-a}}_{\zeta} \underbrace{d(a+\rho e^{it})}_{d\zeta} \end{aligned}$$

da sich die Integrale entlang der geraden Abschnitte genau aufheben. Das zweite Integral ergibt $2\pi i$ und aufgrund der Orientierung des ersten Integrals ergibt sich der Satz.

Satz 2.13 (Cauchy'sche Integralformel). $G \subset \mathbb{C}$ sei offen und die Funktion

$$f : G \rightarrow \mathbb{C}$$

sei analytisch. Die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{U}_r(z_0)$ liege ganz in G . Dann gilt für jeden Punkt $z \in U_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.89)$$

wobei über die „Kreislilie“ γ , d.h. über die Kurve $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ integriert wird.

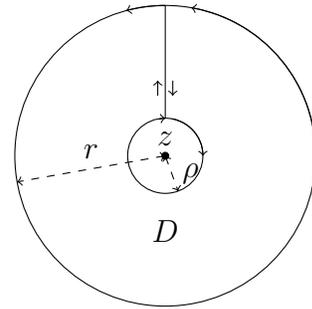
Bemerkungen:

1. $U_r(z_0)$ ist die offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r .
2. z ist ein beliebiger Punkt aus $U_r(z_0)$, dies muss nicht der Mittelpunkt sein.

Beweis: Wir schneiden um $\zeta = z$ einen Kreis mit Radius ρ aus, verbinden die beiden Kreise entlang einer Geraden und betrachten den Limes $\rho \rightarrow 0$. In dem resultierenden Gebiet D ist die Funktion

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

analytisch, d.h. nach Satz 2.10 verschwindet das Integral entlang der gezeigten Kurve γ' . Da sich die Integralanteile entlang der Geraden, die beiden Kreise verbindet, muss gelten, dass das Integral entlang der beiden Kreise gleich ist (beachte die entsprechenden Orientierungen). Nun ist mit $\gamma'(t) = z + \rho e^{it}$



$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} \rho e^{it} i dt = 2\pi i f(z) \\ \Rightarrow f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \end{aligned}$$

■

Bemerkung: Wesentlich an dieser Formel ist, dass man die Werte einer analytischen Funktion in Inneren eine Kreisscheibe durch ihre Werte am Rand berechnen kann. Insbesondere gilt für $z = z_0$ die sogenannte Mittelwertgleichung

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt$$

Satz 2.14 (Leibniz'sche Regel). Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und

$$f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{C} \tag{2.90}$$

eine stetige Funktion, welche für jedes festes $t \in [a, b]$ analytisch in D ist. Die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial z} : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{C} \tag{2.91}$$

sei ebenfalls stetig. Dann ist die Funktion

$$g(z) = \int_a^b f(t, z) dt \tag{2.92}$$

analytisch in D , und es gilt

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} dt. \tag{2.93}$$

Für den Beweis siehe [3] Kapitel II.3.

Satz 2.15 (Verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel). *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.13 gilt: jede analytische Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar. Jede Ableitung ist wieder analytisch. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und all z mit $z - z_0 < r$ gilt*

$$f^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (2.94)$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion unter Benutzung der beiden vorigen Sätze.

Auch die Umkehrung des Cauchy'schen Integralsatzes 2.10 ist gültig:

Satz 2.16 (Satz von Morera). *Sei $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in einem Sterngebiet G . Gilt dann für jede geschlossene Kurve γ in G*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (2.95)$$

so ist f analytisch in G .

Definition 2.18 (Ganze Funktion). *Unter einer ganzen Funktion versteht man eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.*

Beispiele ganzer Funktionen sind Polynome, die Exponentialfunktion, $\cos z$, $\sin z$.

Satz 2.17 (Satz von Liouville). *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Äquivalent: eine nichtkonstante ganze Funktion kann nicht beschränkt sein.

Beweisidee: zeige mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel, dass für ganze beschränkte Funktionen die erste Ableitungen für alle $z \in \mathbb{C}$ verschwinden müssen.

Satz 2.18 (Fundamentalsatz der Algebra:). *Ein Polynom $P_n(z)$ vom Grade $n \geq 1$ besitzt genau n (komplexe) Nullstellen.*

Beweisidee: Man nimmt an, dass $P_n(z)$ keine Nullstelle hat und führt dies mit Hilfe des Satzes von Liouville zum Widerspruch. Durch Herausziehen dieser existierenden Nullstelle aus dem Polynom reduziert man den Grad des Polynoms um 1. Nach n Schritten erhält man

$$P_n(z) = a_n \prod_{\nu=1}^n (z - z_{\nu}),$$

sprich, $P_n(z)$ hat damit genau n Nullstellen z_1, z_2, \dots, z_n (siehe auch [3], Kapitel II.3).

Anwendung zur Berechnung von reellen Integralen: Als ein weiteres Beispiel zur Anwendung des Cauchy'schen Integralsatzes berechnen wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2(\cos t)^2 + b^2(\sin t)^2} dt$$

Dazu betrachten wir die Wege $\gamma_1(t) = a \cos(t) + ia \sin(t)$ und $\gamma_2(t) = a \cos(t) + ib \sin(t)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Der Cauchy'sche Integralsatz impliziert, dass

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz$$

Den Wert des ersten Integrals ist $2\pi i$, siehe Gl. (2.83). In der Parameterdarstellung lautet das zweite Integral

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cos(t) + ib \sin(t)} (-a \sin(t) + ib \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin(t) + ib \cos(t)}{a \cos(t) + ib \sin(t)} \frac{a \cos(t) - ib \sin(t)}{a \cos(t) - ib \sin(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2) \sin(t) \cos(t) + iab}{a^2(\cos t)^2 + b^2(\sin t)^2} dt \stackrel{!}{=} 2\pi i \end{aligned}$$

Da Real- und Imaginärteile übereinstimmen müssen, erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2(\cos t)^2 + b^2(\sin t)^2} dt &= \frac{2\pi}{ab} \\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t) \cos(t)}{a^2(\cos t)^2 + b^2(\sin t)^2} dt &= 0 \end{aligned}$$

2.3 Reihen analytischer Funktionen, Residuensatz

2.3.1 Gleichmäßige Approximation

In Hinblick auf die Reihenentwicklung analytischer Funktionen stellen wir in diesem Kapitel einige wichtige Grundlagen zusammen. Ein wesentlicher Gesichtspunkt ist dabei, dass wir oft für gesuchte Funktionen keine exakte Lösung kennen, aber diese durch Reihen von Funktionen f_n (Polynome oder trigonometrische Funktionen) approximieren. Damit sich stellt sich die Frage, ob und wie sich Stetigkeits- oder Differenzierbarkeitsverhalten der Funktionen f_n auf die Grenzfunktion übertragen.

Eine Folge von Funktionen

$$f_0, f_1, f_2, \dots : D \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt gleichmäßig konvergent gegen die Grenzfunktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}$$

wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0 \text{ und } \forall z \in D.$$

Insbesondere soll also n_0 nicht von z abhängen. An dieser Stelle ist D eine beliebige nichtleere Menge. Wir nehmen jetzt an, dass D ein Teil der komplexen Ebene oder allgemeiner ein Teil des \mathbb{R}^n ist.

Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen f , wenn es zu jedem Punkt $a \in D$ eine Umgebung U von a im \mathbb{R}^n gibt, sodass $f_n|_{U \cap D}$ gleichmäßig konvergiert.

Mit Hilfe des Heine-Borel'schen Überdeckungssatzes ist es dann leicht zu zeigen, dass die Folge $\{f_n|_K\}$ für jedes Kompaktum K , welches in D enthalten ist, gleichmäßig konvergiert. Man sagt daher: Eine lokal gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist kompakt konvergent.

Hiervon gilt die Umkehrung, wenn D offen ist, denn dann existiert zu jedem Punkt $a \in D$ eine abgeschlossene (und damit kompakte) Kreisscheibe mit Mittelpunkt a , welche in D enthalten ist.

Aus der reellen Analysis ist das Analogon zum Folgenden bekannt: Sei

$$f_0, f_1, f_2, \dots : D \rightarrow \mathbb{C}$$

eine Folge von stetigen Funktionen, welche lokal gleichmäßig konvergiert. Dann ist die Grenzfunktion ebenfalls stetig. Zudem gilt für jede stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow D$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

Der Beweis der 2. Aussage folgt aus der Tatsache, dass das Bild von γ kompakt ist und dass daher die Folge f_n auf dem Bild von γ gleichmäßig konvergiert. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n(z) - f(z)) dz \right| \leq \varepsilon l(\gamma)$$

Das folgende Theorem geht auf K. Weierstraß zurück.

Satz 2.19. *Sei*

$$f_0, f_1, f_2, \dots : D \rightarrow \mathbb{C}$$

eine Folge von analytischen Funktionen, welche lokal gleichmäßig konvergiert. Dann ist auch die Grenzfunktion f analytisch, und die Folge der Ableitungen $\{f'_n\}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen f' .

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass man die komplexe Differenzierbarkeit durch ein Integralkriterium charakterisieren kann, den Satz 2.16 von Morera, sowie der Tatsache, dass unser Kurvenintegral stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz ist. Die Behauptung über f'_n ergibt sich aus der Cauchy'shen Integralformel (2.94) für f'_n bzw. f' . ■

Bemerkung: Das Analogon dieses Satzes für den \mathbb{R}^2 ist im Reellen falsch.

Satz 2.19 kann man natürlich auch auf Reihen umschreiben: Eine Reihe von Funktionen

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots, \quad f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt (lokal) gleichmäßig konvergent, wenn die Folge $\{S_n\}$ der Partialsummen

$$S_n = \sum_{j=0}^n f_j$$

(lokal) gleichmäßig konvergiert.

Definition 2.19. Eine Reihe $f_0 + f_1 + f_2 + \dots$ von Funktionen

$$f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$$

mit $D \subset \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ heißt normal konvergent (in D), falls es zu jedem Punkt $z \in D$ eine Umgebung U und eine Folge M_n ($n \in \mathbb{N}_0$) nicht negativer reeller Zahlen gibt, sodass gilt:

$$|f_n(z)| \leq M_n \text{ für alle } z \in U \cup D, \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} M_n \text{ konvergiert.}$$

Bemerkung: (Weierstraß'scher Majorantentest). Eine normal konvergente Reihe von Funktionen konvergiert absolut und lokal gleichmäßig. Eine normal konvergente Funktionenreihe kann daher beliebig umgeordnet werden, ohne dass sich an der Konvergenz oder dem Grenzwert etwas ändert.

Der zu Satz 2.19 analoge Satz für Reihen lautet

Satz 2.20. Sei

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots$$

eine normal konvergente Reihe analytischer Funktionen auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$. Dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls analytisch, und es gilt

$$f' = f_0' + f_1' + f_2' + \dots$$

Zusatz: Die Reihe der Ableitungen konvergiert ebenfalls normal.

2.3.2 Singularitäten

Funktionen wie z.B.

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{1}{z}, \quad e^{\frac{1}{z}}$$

sind im Nullpunkt nicht definiert. Sie sind jedoch in einer punktierten Umgebung $\dot{U}_r(0)$ analytisch. Ihr Verhalten in der Nähe des Nullpunkts ist jedoch sehr unterschiedlich. Sie haben verschiedenes singuläres Verhalten. Wir werden sehen, dass diese drei Beispiele in gewisser Hinsicht exemplarisch sind.

Definition 2.20. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt, welcher nicht zu D gehört, aber die Eigenschaft hat, dass ein $r > 0$ existiert, so dass die punktierte Kreisscheibe

$$\dot{U}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$$

ganz in D enthalten ist. Wir nennen dann z_0 eine (isolierte) Singularität der Funktion f .

Bemerkung: Ein Verzweigungspunkt, siehe Kap. 2.1.4 ist ebenfalls eine Singularität, allerdings ist er keine isolierte Singularität und fällt aus dem Rahmen dieses Kapitels.

Definition 2.21. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Singularität z_0 einer analytischen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt hebbbar, falls sich f auf ganz $D \cup \{z_0\}$ analytisch fortsetzen lässt; d.h. falls es also eine analytische Funktion $\tilde{f} : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass $\tilde{f}|_D = f$ gilt.

Beispiel: Die Funktion $f(z) = \sin(z)/z$ hat bei z_0 eine hebbare Singularität, da

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

Satz 2.21 (Riemann'scher Hebbbarkeitssatz). Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Singularität z_0 einer analytischen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann hebbbar, falls es eine punktierte Umgebung $\dot{U}_r(z_0) \subset D$ von z_0 gibt, in der f beschränkt ist.

Definition 2.22 (Pol). Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Singularität z_0 einer analytischen Funktion heißt Pol (oder Polstelle), falls es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Funktion

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

eine hebbare Singularität in z_0 hat. Das minimale m mit dieser Eigenschaft ist die Ordnung des Pols.

Beispiel: Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z - 2)^3}$$

hat einen Pol 3. Ordnung bei $z = 2$.

Bemerkung: Eine Funktion $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ hat im Unendlichen einen Pol n -ter Ordnung, wenn $g(z) = f(1/z)$ bei $z = 0$ einen Pol n -ter Ordnung besitzt.

Beispiel: Die Funktion

$$f(z) = z^3$$

hat einen Pol 3. Ordnung im Unendlichen, da $g(z) = 1/z^3$ einen Pol dritter Ordnung bei $z = 0$ hat.

Definition 2.23. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Singularität einer analytischen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt wesentlich, falls weder hebbbar ist, noch einen Pol darstellt.

Beispiel: Die Funktionen

$$f(z) = e^{1/z} \text{ und } f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

haben bei $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

In der Nähe einer wesentlichen Singularität hat eine Funktion $f(z)$ ein sehr „nervöses“ Verhalten, denn es gilt der Satz

Satz 2.22 („großer“ Satz von Picard). *Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine wesentliche Singularität der analytischen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, dann sind nur zwei Fälle möglich: Entweder gilt für jede punktierte Umgebung $\dot{U} \subset D$ von z_0*

$$f(\dot{U}) = \mathbb{C}$$

oder

$$f(\dot{U}) = \mathbb{C} \setminus \{c\}$$

mit $c \in \mathbb{C}$.

In anderen Worten: in jeder noch so kleinen Umgebung um z_0 nimmt f jeden Wert in \mathbb{C} an mit maximal einer Ausnahme $c \in \mathbb{C}$. Der (schwierige) Beweis findet sich z.B. in [6], Kapitel X.4 oder in [4] Kapitel III.3.

Definition 2.24 (Meromorphe Funktionen). *Funktionen, die in der ganzen komplexen Ebene bis auf isolierte Pole, die sich im Endlichen nicht häufen, analytisch sind (außer eventuell bei $z = \infty$), heißen meromorph.*

Beispiele

- Alle rationalen Funktionen

$$\frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei $P(z)$ und $Q(z)$ teilerfremde Polynome sind.

-

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

2.3.3 Potenzreihen, Taylor–Reihe

Wie wir in Kap. 2.2.3 gesehen haben, ist eine analytische Funktion beliebig oft differenzierbar. Damit lässt sich die Taylor–Reihe formal hinschreiben. Darüber hinaus kann mit Hilfe der im vorigen Kapitel zusammengefassten Sätze zeigen, dass die Taylor–Reihe die Funktion $f(z)$ lokal darstellt (das Restglied wird also beliebig klein).

Satz 2.23 (Taylor–Reihe). *Sei $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch im Gebiet G und sei z_0 innerer Punkt von G . Weiter ist die Kurve $\gamma(t) = z_0 + re^{it} \subset G$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Dann gilt für jedes z im Inneren der von γ umschlossenen Kreisscheibe U :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.96)$$

$$\text{mit } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (2.97)$$

wobei die Reihe in U absolut und gleichmäßig konvergiert.

Beweis: $f(z)$ ist aufgrund der Cauchysche Integralformel (2.89) durch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

darstellbar. Um daraus zu einer Reihenentwicklung für $f(z)$ zu gelangen, formen wir den Nenner im Integranden um:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

Die Reihe konvergiert, da z im Inneren und ζ auf dem Rand der Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 ist, d.h.

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1.$$

Damit ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

und der Satz ergibt sich aus Gl. (2.94). ■

Bemerkungen:

- Jede meromorphe Funktion lässt sich lokal – um den Punkt z_0 herum – in eine Potenzreihe entwickeln. Die nächstliegende Singularität (Polstelle, wesentliche Singularität, Verzweigungspunkt) bestimmt den Konvergenzradius der Taylor-Reihe.
- Hat f im Endlichen keine Singularität, so lässt sich f global als Potenzreihe darstellen, d.h. $R = \infty$. Beispiele dafür sind $e^z, \sin z, \cos z$.
- Bei mehrdeutigen Funktionen ist eine Darstellung als Potenzreihe nur auf dem jeweiligen Blatt (Hauptwert) möglich.

Beispiele: Als Entwicklungspunkt nehmen wir $z_0 = 0$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R = \infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = \infty$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad R = \infty$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \dots \quad R = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad R = 1$$

Die nächste Reihe ist nur auf dem ersten Riemann-Blatt gegeben:

$$\ln(1+z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n} \quad R = 1$$

Hier haben wir angenommen, dass der Verzweigungsschnitt entlang der negativen reellen Achse verläuft.

Im Folgenden diskutieren wir spezielle Taylor-Reihen und deren Koeffizienten, die sogenannten Bernoullischen Zahlen¹. Dazu betrachten wir die Funktion:

$$\cot z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \left(1 + \frac{2e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right) = 2i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2iz} - 1} \right) = 2i \left(\frac{1}{2} + f(2iz) \right) \quad (2.98)$$

¹Diese spielen auch in der num. Mathematik eine wichtige Rolle.

mit

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z\left(\frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}. \quad (2.99)$$

Daraus folgt

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-4)^n c_{2n-1} z^{2n-1}, \quad (2.100)$$

da $\cot z$ eine ungerade Funktion ist, verschwinden alle Koeffizienten c_{2n} mit $n = 1, 2, \dots$. Genau genommen ist dies eine sogenannte Laurent-Reihe, siehe Kap. 2.3.4. Man setzt nun:

$$c_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} B_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.101)$$

Die B_n werden Bernoullische Zahlen genannt. Für diese gelten die Beziehung

$$B_n = 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n}}. \quad (2.102)$$

Für eine Herleitung siehe z.B. [1], Seite 222 f.

Diese Beziehung kann einerseits dazu dienen, die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n}}$$

zu summieren, falls die B_n bekannt sind, andererseits aber auch dazu, die Zahlen B_n vor allem für große n abzuschätzen, da dann die Reihen gut konvergieren.

Mit Hilfe von

$$1 = (e^z - 1) \frac{1}{e^z - 1} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} B_n z^{2n-1} \right)$$

erhält man durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

$$1 - \frac{2k+1}{2} + \sum_{\nu=1}^k \binom{2k+1}{2\nu} (-1)^{\nu-1} B_{\nu} = 0.$$

Damit lassen sich die Bernoullischen Zahlen rekursiv bestimmen:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \quad \dots$$

Bemerkung: $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$, so ist z.B.

$$B_{50} = \frac{495057205241079648212477525}{66}$$

Mit Hilfe der Bernoullischen Zahlen bekommt man aus Gl. (2.102) die Eulerschen Summenformeln:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4} = \frac{\pi^4}{90}; \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^6} = \frac{\pi^6}{945}; \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^8} = \frac{\pi^8}{9450}; \quad \dots$$

Bemerkung: Man definiert die Riemannsche ζ -Funktion als die Summe der Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (2.103)$$

Hier ist

$$n^s = e^{s \ln n} \quad (2.104)$$

Man kann zeigen, dass sie in jeder Halbebene

$$H_\delta = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) \geq 1 + \delta\} \text{ mit } \delta > 0 \quad (2.105)$$

absolut und gleichmäßig konvergiert. Sie spielt in der statistischen Physik, in der Quantenphysik und auch in der analytischen Zahlentheorie eine wichtige Rolle.

Für die Cotangensfunktion gilt nun:

$$\cot z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!} B_n z^{2n-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots \quad (2.106)$$

Aus den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen folgt

$$\tan z = \cot z - 2 \cot 2z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4^n - 1)4^n}{(2n)!} B_n z^{2n-1} = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \quad (2.107)$$

und

$$\frac{1}{\sin z} = \cot z + \tan \frac{z}{2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 2}{(2n)!} B_n z^{2n-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \dots \quad (2.108)$$

Bemerkung: Es gibt eine weitere Definition der Bernoullischen Zahlen, die wir mit B'_k bezeichnen werden mit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} B'_{2k+1} &= 0 \\ B'_{4k} &= -B_{2k} < 0 \\ B'_{4k-2} &= B_{2k-1} > 0 \end{aligned}$$

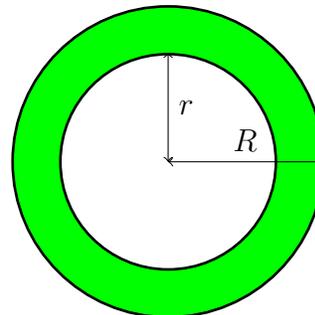
2.3.4 Laurent–Reihe

Laurent-Reihen $\sum a_n(z - z_0)^n$ sind Verallgemeinerungen von Potenzreihen. Es dürfen auch negative Potenzen auftreten.

Im Folgenden sei $0 < r < R < \infty$. Wir untersuchen analytische Funktionen auf dem Ringgebiet

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$$

Beispiele von solchen Funktionen kann man leicht konstruieren. Man gehe von analytischen Funktionen



$$g : U_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f : U_{\frac{1}{r}}(0) \rightarrow \mathbb{C}$$

aus. Dann ist die Funktion $h(1/z)$ analytisch für $|z| > r$ und man definiere

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \text{ für } r < |z| < R.$$

Tatsächlich lässt sich jede in einem Ringgebiet analytische Funktion in dieser Weise zerlegen.

Satz 2.24 (Laurentzerlegung). *Jede auf einem Ringgebiet*

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$$

analytische Funktion f gestattet eine Zerlegung der Art

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right). \tag{2.109}$$

Dabei sind

$$g : U_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f : U_{\frac{1}{r}}(0) \rightarrow \mathbb{C}$$

analytische Funktionen. Fordert man noch $h(0) = 0$, so ist diese Zerlegung eindeutig bestimmt.

Für den Beweis siehe [3], Kapitel III.5.

Entwickelt man die Funktionen g und h , d.h.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ für } |z| < R \text{ und } h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \text{ für } |z| < \frac{1}{r}.$$

Mit $a_{-n} = b_n$ erhält man die Laurent-Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \text{ für } r < |z| < R. \tag{2.110}$$

Man kann natürlich auch andere Entwicklungspunkte z_0 wählen.

Satz 2.25 (Laurent-Reihe). Sei f analytisch im Gebiet

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

mit $0 < r < R < \infty$. Dann lässt sich f in eine Laurent-Reihe entwickeln, welche in \mathcal{R} normal konvergiert,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } z \in \mathcal{R} \quad (2.111)$$

Die Entwicklung ist eindeutig bestimmt und es gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \text{mit } r < \rho < R \quad (2.112)$$

Bemerkungen:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ analytischer Teil der Laurent-Reihe
- $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ Hauptteil der Laurent-Reihe
- In der Umgebung eines Verzweigungspunktes lassen sich Funktionen grundsätzlich nicht in eine Laurent-Reihe entwickeln.

Charakterisierung der Singularitäten Es sei die meromorphe (analytische) Funktion f als Laurent-Reihe um z_0 gegeben.

- Falls $a_n = 0$ für $n < 0$, dann handelt sich um eine hebbare Singularität.
- Falls $a_n = 0$ für $n < m$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $a_{-m} \neq 0$, dann handelt sich um einen Pol m -ter Ordnung.
- Falls $a_{-n} \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, dann handelt es sich um eine wesentliche Singularität.

Verschwindet der Hauptteil liegt eine hebbare Singularität vor.

Wenn er nicht verschwindet und aus endlich vielen Termen besteht, besitzt f einen Pol, bei unendlich vielen Termen eine wesentliche Singularität.

Beispiele

1. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

hat zwei einfache Pole bei $z_0 = \pm i$. Für die Laurent-Reihe um $z_0 = i$ findet man

$$f(z) = \frac{1}{z - i} \frac{1}{2i + (z - i)} = \frac{1}{z - i} \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(-2i)^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{z - i}{-2i} \right)^n$$

mit Konvergenzradius $R = 2$.

2. Die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad 0 < |z| < 2\pi$$

hat bei $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität. Man findet für die Laurent-Reihe, die in diesem Fall eine Potenzreihe ist:

$$f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

3. Die Funktion

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3}, \quad z \neq 0$$

hat bei $z_0 = 0$ einen Pol 3. Ordnung

$$f(z) = \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!} z^n = \underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z}}_{\text{Hauptteil } h(1/z), \text{ analyt. Teil } g(z)} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}z + \frac{1}{5!}z^2 + \dots$$

Es besteht die Möglichkeit, daß eine Funktion f , die durch eine Potenzreihe definiert ist, auch außerhalb des Konvergenzbereichs der Potenzreihe konvergiert, so daß der Konvergenzbereich der analytischen Funktion f erweitert werden kann. Dieser Prozeß, den man analytische Fortsetzung nennt, läßt sich nach allen Richtungen so lange fortsetzen, bis man an Singularitätsbarrieren gelangt.

Satz 2.26. *Stimmen zwei analytische Funktionen f_1 und f_2 auf einem Gebiet (oder einer Kurve oder wenigstens einer Menge mit einem Häufungspunkt im Endlichen) überein, so sind sie im gemeinsamen Definitionsbereich identisch.*

Außerhalb des gemeinsamen Definitionsbereichs stellt f_1 die (eindeutige) analytische Fortsetzung von f_2 dar und umgekehrt.

Ein besonderer Fall ist die Fortsetzung einer reellen Funktion ins Komplexe. Da die Funktionen

$$e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

auf der reellen Achse übereinstimmen, ist e^z die (eindeutige) Fortsetzung von e^x . Allgemein ist die Übertragung einer reellen Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{mit } a_n \in \mathbb{R} \quad \text{und } |x| < R$$

zur komplexen Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ mit } |z| < R$$

die (eindeutige) analytische Fortsetzung von $P(x)$. $P(z)$ ist die einzige analytische Fortsetzung, die längs des reellen Konvergenzintervalls mit $P(x)$ übereinstimmt.

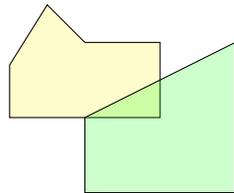
Man kann zeigen, dass unter bestimmten Voraussetzungen auf diesen erweiterten Definitionsbereichen der fortgesetzten Funktion f , die nicht notwendigerweise Sterngebiete sind, f eine Stammfunktion besitzt. Wir werden diese Voraussetzungen hier nicht diskutieren, aber damit zusammenhängend bestimmte Teilmengen von \mathbb{C} charakterisieren.

Definition 2.25 (Elementargebiet). *Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt Elementargebiet, wenn jede auf D definierte analytische Funktion eine Stammfunktion in D besitzt.*

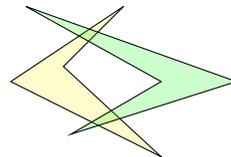
Zum Beispiel ist jedes Sterngebiet ein Elementargebiet. Es gilt

Satz 2.27. *Seien D und D' zwei Elementargebiete. Falls $D \cap D'$ zusammenhängend und nicht leer ist, so ist $D \cup D'$ auch ein Elementargebiet.*

Für einen Beweis siehe [3], Kapitel II.2.



Elementargebiet



kein Elementargebiet

Elementargebiete sind genau die sogenannten einfach zusammenhängenden Gebiete (anschaulich sind das die Gebiete „ohne Löcher“). Damit zusammenhängend ist Folgendes interessant:

Satz 2.28. *Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion auf einem Elementargebiet D , und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann existiert eine analytische Funktion $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft*

$$f(z) = e^{h(z)}. \tag{2.113}$$

Man nennt h einen analytischen Zweig des Logarithmus von f .

2.3.5 Residuensatz

Wir haben bereits bei der Berechnung des Integrals

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{z^n} dz = 2\pi i \delta_{n1}$$

gesehen, dass der Fall $n = 1$ speziell ist. Dies hat sich in der Cauchy'schen Integralformel, Gl. (2.89), fortgesetzt und wird hier nun weitergeführt.

Bevor wir dies vertiefen, benötigen wir noch den Begriff der Umlaufzahl. Bisher haben wir implizit immer angenommen, dass die betrachteten Kurven genau einmal durchlaufen wird. Wir haben z.B. keine Kurven der Art

$$\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i k t} \text{ mit } t \in [0, 1] \text{ und } k \geq 1, k \in \mathbb{N}$$

betrachtet. In diesem Beispiel wird der Kreis k -mal durchlaufen, wenn t von 0 bis 1 variiert wird. Dies unabhängig von der genauen Parametrisierung der Kurve. Sei z ein Punkt aus der von der Kurve umschlossenen Kreisscheibe. Man sagt, dass γ bezüglich z die Umlaufzahl k habe. Dieses Beispiel gibt Anlass zu der nachfolgenden Definition.

Definition 2.26 (Umlaufzahl). Sei γ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve, deren Bild den Punkt $z \in \mathbb{C}$ nicht enthält. Die Umlaufzahl $\chi(\gamma, z)$ (auch die Windungszahl oder der Index) von γ bezüglich z ist durch

$$\chi(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \quad (2.114)$$

definiert.

Bemerkungen:

- Mit dieser Definition kann auch das Innere bzw. Äußere einer Kurve bestimmt werden. Im Inneren ist die Umlaufzahl ungleich Null, im Äußeren gleich Null.
- In verschiedenen Teilgebieten der Physik, z.B. Festkörperphysik oder Teilchenphysik, können mit Hilfe von Umlaufzahlen (oder auch der Verallgemeinerungen) sogenannte topologische Quantenzahlen definiert werden.

Definition 2.27 (Residuum). Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität der analytischen Funktion f und

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.115)$$

ihre Laurententwicklung in einer punktierten Umgebung von z_0 . Der Koeffizient a_{-1} in dieser Entwicklung heißt Residuum von f an der Stelle z_0 .

Wir werden im Folgenden die Bezeichnung $\text{Res}(f; z_0) = a_{-1}$ verwenden. Aufgrund von Gl. (2.112) gilt für ein hinreichend kleines ρ

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \rho} f(\zeta) d\zeta. \quad (2.116)$$

Satz 2.29 (Residuensatz). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $z_1, \dots, z_k \in D$ endlich viele (paarweise verschiedene) Punkte, ferner sei $f : D \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und $\gamma : [a, b] \rightarrow D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ eine geschlossene (stückweise glatte) Kurve. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j) \chi(\gamma, z_j). \quad (2.117)$$

Für den Beweis siehe [3], Kapitel III.6.

Bemerkung: Es tragen nur Punkte z_j bei, die von γ umlaufen werden.

Mit Hilfe von Gl. (2.116) kann man zeigen, dass, falls die Funktion f bei z_0 ein Pol k -ter Ordnung hat, gilt

$$\text{mit } g(z) = (z - z_0)^k f(z) \quad (2.118)$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z) = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z_0). \quad (2.119)$$

Falls nun in z_0 die Funktionen f und g analytisch sind und g in z_0 eine einfache Nullstelle hat, folgt daraus

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (2.120)$$

Beispiele

- Die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1 + z^2}$$

hat bei $z = i$ einen Pol erster Ordnung. Aus dem obigen ergibt sich

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{z + i} = \frac{1}{2ei}$$

- Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1 + z^2)^2}$$

hat in $z = i$ einen Pol zweiter Ordnung. Man findet

$$g(z) = (z - i)^2 f(z) = \frac{1}{(z + i)^2} \Rightarrow g'(z) = \frac{-2}{(z + i)^3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{1!} g'(i) = -\frac{i}{4}$$

- Die Funktion $f(z) = \cot(z)$ hat bei $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, Pole erster 1. Ordnung.

$$\cot(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, k\pi\right) = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1$$

Von besonderer Bedeutung sind folgende Anwendungen des Residuensatzes.

Satz 2.30.

Die Funktion $f(z)$ sei in dem Elementargebiet $G \subset \mathbb{C}$ meromorph, auf dessen Rand $\gamma = \partial G$ analytisch und von Null verschieden. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P. \quad (2.121)$$

N ist dabei die Anzahl der Nullstellen, P die Anzahl der Pole in G , jeweils unter Beachtung der Vielfachheiten.

Daraus folgt unmittelbar

Satz 2.31. Die Funktion $f(z)$ sei in dem Elementargebiet G meromorph, auf $\gamma = \partial G$ analytisch und vom endlichen Wert $a \in \mathbb{C}$ verschieden. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = N_a - P. \quad (2.122)$$

N_a ist dabei die Anzahl der a -Stellen, d.h. der Stellen mit $f(z) = a$.

Berechnung von Integralen und Reihen

Der Residuensatz erlaubt es auch, ohne viel Rechenaufwand komplexe Integrale über geschlossene Wege zu berechnen. Wir werden dies nun dazu verwenden, um bestimmte Integrale über die reelle Achse oder Teilen derselben auszuwerten. Dazu benötigt man das

Lemma von Jordan: Ist $\alpha > 0$ und konvergiert $g(z)$ in der oberen Halbebene von \mathbb{C} , d.h. $\text{Im}(z) \geq 0$, gleichmäßig gegen Null für alle $|z| \rightarrow \infty$, dann gilt für $K_R = Re^{it}$ mit $0 \leq t \leq \pi$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0. \quad (2.123)$$

Dies gilt auch, wenn $\alpha = 0$ ist und zusätzlich $z \cdot g(z)$ in der oberen Halbebene gleichmäßig gegen Null strebt. Völlig analog lässt sich das Lemma für die untere Halbebene formulieren.

Dieses Lemma wird zur Berechnung der beiden ersten Klassen der folgenden Integrale verwendet.

1. Integration von rationalen Funktionen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, z_j) \text{ mit } \text{Im}(z_j) > 0$$

Es dürfen keine Pole auf der reellen Achse liegen, d.h. $Q_m(x) \neq 0$, und außerdem muss, um die Konvergenz des Integrals im Unendlichen sicherzustellen, gelten: $m \geq n + 2$.

Beispiel: $f(x) = 1/(1 + x^2)$ mit der Fortsetzung ins Komplexe

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \text{Res}(f(z), i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$

2. Berechnung von Fourierintegralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\pm ikx} dx,$$

die wir im nächsten Kapitel behandeln werden.

3. Integration trigonometrischer Funktionen: $f(\cos \theta, \sin \theta)$ sei eine rationale Funktion, die keine Pole für $\theta \in [0, 2\pi]$ besitzt. Wir betrachten folgende Substitution:

$$z = e^{i\theta}$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{iz} dz.$$

und erhalten mit Hilfe des Residuensatz:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{z} =$$

$$= 2\pi \sum_j \text{Res}\left(\frac{f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}{z}, z_j\right) \text{ mit } |z_j| < 1$$

Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{4z}{z^4 + 6z^2 + 1} dz$$

Zur Berechnung der Residuen benötigen wir die Nullstellen von $z^4 + 6z^2 + 1$. Diese sind

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{3 - \sqrt{2}} \text{ und } z_{3,4} = \pm i\sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

Die beiden ersten liegen im Einheitskreis, die beiden letzteren außerhalb. Für die Residuen findet man

$$\text{Res} \left(\frac{4z}{z^4 + 6z^2 + 1}, z_i \right) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) \frac{4z}{\prod_{j=1}^4 (z - z_j)} = \frac{4z_i}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)}$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} d\theta = 2\pi \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left(\frac{4z}{z^4 + 6z^2 + 1}, z_i \right) = \sqrt{2}\pi$$

Analog erhält man

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta = \sqrt{2}\pi$$

Mit Hilfe des Residuensatzes lassen sich auch unendliche Reihen berechnen. Für sie gelten nach [3], Aufgabe 7 aus Kapitel III.7, die Formeln:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = - \sum_j \text{Res} (\pi \cot(\pi z) \cdot f(z), z_j) \quad (2.124)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = - \sum_j \text{Res} \left(\frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}, z_j \right) \quad (2.125)$$

wobei über die Residuen an den Polstellen der Funktion $f(z)$ summiert wird. Hier wird vorausgesetzt, dass $|z^2 f(z)|$ außerhalb eines geeigneten kompakten Gebietes nach oben beschränkt ist. Weiter dürfen die Stellen z_i nicht aus \mathbb{Z} sein.

Beispiele:

- Es sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = -\text{Res} \left(\frac{\pi \cot \pi z}{(a+z)^2}, -a \right) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$$

- Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a/b \neq -n^2$ und $n \in \mathbb{N}$. Man findet

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a + bn^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + bn^2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} + \sum_{z_i = \pm \sqrt{-\frac{a}{b}}} \operatorname{Res} \left(\frac{\pi \cot(\pi z)}{a + bz^2}, z_i \right) \right] \\ &= \frac{1}{2a} \left(1 + \pi \sqrt{\frac{a}{b}} \coth \pi \sqrt{\frac{a}{b}} \right) \end{aligned}$$

2.4 Fourier-Reihen und Fourier-Transformation

Dieses Kapitel orientiert sich an Kapitel 5 von W.A. Strauss, Partielle Differentialgleichungen.

2.4.1 Fourier-Reihen

Wir hatten am Ende des Kapitels zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen Randbedingungen bei zwei verschiedenen x -Werten im Gegensatz zum Anfangsbedingungen diskutiert. Dabei sind wir als Beispiel auf folgende Gleichung gestossen.²

$$-\frac{d^2}{dx^2} \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x) \quad (2.126)$$

mit den Randbedingungen $\phi_n(0) = \phi_n(l) = 0$ (sogenannte Dirichlet-Randbedingung). Diese Gleichung ergibt sich z.B. auch in der Quantenmechanik aus der Schrödingergleichung, wenn man ein freies Teilchen in einer Box betrachtet. Die $\phi_n(x)$ sollen im Intervall $I = [0, l]$ zweimal differenzierbar sein, d.h. der zugrunde liegende Vektorraum ist $C^2([0, l])$. Als Lösung erhält man

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \text{ und } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{ mit } n \in \mathbb{N}. \quad (2.127)$$

Man kann zeigen, dass die ϕ_n eine abzählbare Basis in einem Funktionenraum darstellen, der an dieser Stelle als unendlich dimensionaler Vektorraum aufgefasst wird. Zudem bilden die ϕ_n eine Orthonormalsystem, da für $n \neq m$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^l dx \phi_n^*(x) \phi_m(x) &= \int_0^l dx \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l dx \cos\left(\frac{(n-m)\pi}{l}x\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi}{l}x\right) \\ &= \frac{l}{2(n-m)\pi} \sin\left(\frac{(n-m)\pi}{l}x\right)_0^l - \frac{l}{2(n+m)\pi} \sin\left(\frac{(n+m)\pi}{l}x\right)_0^l = 0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

²Allgemeiner findet hat man in d Dimensionen die Eigenwertgleichung: $-\Delta \phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x)$ für den Laplace-Operator.

Im Falle $n = m$ findet man

$$\int_0^l dx \sin^2 \left(\frac{n\pi}{l} x \right) = \frac{l}{2} \quad (2.129)$$

Damit kann man formal eine Funktion $\varphi(x)$, die auf dem Intervall I definiert ist, durch

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \quad (2.130)$$

mit

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx \varphi(x) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \quad (2.131)$$

darstellen. Dies ist eine ungerade Fourier-Reihe. Beachten Sie, dass hier noch die Frage der Konvergenz offen ist, die wir weiter unten beantworten werden.

Falls man eine sogenannte Neumann-Randbedingung vorgibt, d.h. $\phi'_n(0) = 0 = \phi'_n(l)$, stösst man auf die gerade Fourier-Reihe, in der $\varphi(x)$ die Darstellung

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \quad (2.132)$$

mit

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx \varphi(x) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.133)$$

besitzt. Auch verwendet man die Tatsache, dass

$$\int_0^l dx \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \cos \left(\frac{m\pi}{l} x \right) = \frac{l}{2} \delta_{nm} \quad (2.134)$$

gilt und zudem die konstanten Funktionen normal auf $\cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$ stehen. Da wir die Konvergenzfrage erst weiter unten angehen, ist dies an dieser Stelle eine formale Entwicklung.

Hat man eine Funktion $\varphi(x)$ auf dem Intervall $[-l, l]$ vorgegeben, erhält man die ganze Fourier-Reihe:

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \quad (2.135)$$

mit

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dx \varphi(x) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.136)$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l dx \varphi(x) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \quad (2.137)$$

Durch einfache Integration kann man wieder zeigen, dass die Funktionen $\phi_0(x) = 1$, $\sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$ und $\cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$ auf dem Intervall $[-l, l]$ ein Orthonormalsystem bilden.

Beispiele

1. Sei $\varphi(x) = 1$ im Intervall $(0, 1)$.

(a) Ungerade Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = -\frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \Big|_0^l \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi}{l}x\right) + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}x\right) \end{aligned} \quad (2.138)$$

(b) Gerade Fourier-Reihe: Da es sich hier um eine konstante Funktion handelt, die orthogonal auf $\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ steht, ergibt sich $A_0 = 2$ und $A_n = 0$ für $n \geq 1$. Daraus folgt die triviale Identität

$$1 = 1 + 0 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right) + 0 \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right) + \dots \quad (2.139)$$

Die beiden Reihen unterscheiden sich insbesondere, wenn man die Fortsetzung zu den Randpunkten betrachtet, da diese im ersten Fall unstetig und im zweiten Fall stetig ist.

2. Sei $\varphi(x) = x$ im Intervall $(0, l)$

(a) Ungerade Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l x \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \\ &= \left[-\frac{2x}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + \frac{2l}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]_0^l \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{2l}{n^2\pi^2} \sin(n\pi) = \frac{2l}{n\pi} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

und damit

$$x = \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (2.140)$$

(b) Gerade Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l x dx = l \\
 A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l x \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \\
 &= \left[\frac{2x}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + \frac{2l}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]_0^l \\
 &= \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi) + \frac{2l}{n^2\pi^2} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{2l}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]
 \end{aligned}$$

und damit

$$x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{l}x\right) \quad (2.141)$$

Definition 2.28. Eine in $-\infty < x < \infty$ definierte Funktion $\phi(x)$ heißt periodisch, falls es eine Zahl $p > 0$ gibt, sodass

$$\phi(x+p) = \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.142)$$

Die kleinste Zahl, für die diese Eigenschaft zutrifft, heißt Periode von $\phi(x)$.

Ist eine Funktion auf einem Intervall der Länge p definiert, so kann sie nur auf eine Art zu einer Funktion der Periode p fortgesetzt werden. Im Zusammenhang mit Fourier-Reihen ist wichtig, daß eine im Intervall $I = (-l, l)$ definierte Funktion $\phi(x)$ die periodische Fortsetzung

$$\phi_{per}(x) = \phi(x - 2lm) \quad \text{für } -l + 2lm < x < l + 2lm \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (2.143)$$

besitzt. Bei dieser Definition werden die Funktionswerte an den Stellen $x = l + 2lm$ nicht vorgegeben. Im Allgemeinen die Fortsetzung an diesen Stellen Sprungstellen, außer für die einseitigen Grenzwerte gilt ($\epsilon > 0$):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(-l + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(l - \epsilon) \Leftrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\phi(-l + \epsilon) - \phi(l - \epsilon)) = 0 \quad (2.144)$$

$\phi(-l-)$ und $\phi(l+)$ stimmen überein.

Bemerkungen

- Ein Funktion heißt gerade, falls

$$\phi(x) = \phi(-x), \quad (2.145)$$

bzw. ungerade, falls

$$\phi(x) = -\phi(-x). \quad (2.146)$$

Man spricht dabei auch von gerade bzw. ungerader Parität. Beachte, dass Differenzieren und Integrieren die Parität einer Funktion ändern.

- Fourierreihen können auch in komplexer Form angegeben werden, da

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}). \quad (2.147)$$

Damit erhält man für eine auf $I = (-l, l)$ definierte Funktion φ

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{l} x} \quad (2.148)$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dx \varphi(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} \quad (2.149)$$

Falls $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist $c_n = c_{-n}^*$.

Vollständigkeit, Konvergenz:

Wir hatten bis jetzt die Konvergenz-Frage außen vor gelassen. Da diese Frage wichtig ist, sieht man bereits an der Fourier-Entwicklung der konstanten Funktion 1 auf dem Intervall $(0, l)$. Wir hatten

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} x\right)$$

erhalten. Differenziert man beide Seiten und vertauscht auf der rechten Seite ohne Bedenken Summation und Differentiation, so findet man

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} x\right) = \frac{4}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} x\right)$$

und damit eine divergente Reihe, da $\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{l} x\right)$ keine Nullfolge ist. Der Ursache für das Problem ist, dass die obige Fourier-Entwicklung nicht absolut konvergiert

Drei Konvergenzbegriffe:

Definition 2.29. Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen $f(x)$ in $I = (a, b)$, wenn sie für $\forall x \in I$ gegen $f(x)$ konvergiert. In anderen Worten, für jedes feste $x \in I$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = 0 \quad (2.150)$$

Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x)$ in $I = [a, b]$, falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = 0 \quad (2.151)$$

Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert im quadratischen Mittel (oder im L^2 -Sinne) gegen $f(x)$ in $I = (a, b)$, falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b dx \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 = 0 \quad (2.152)$$

Beispiele: Der zugrundeliegende Funktionenraum ist $C^0([0, 1])$, d.h. der Raum der im Intervall $[0, 1]$ stetigen Funktionen.

1. Sei $f_n(x) = (1-x)x^{n-1}$ im Intervall $(0, 1)$. Die entsprechende Reihe ist eine Teleskopreihe und man erhält

$$\sum_{n=1}^N f_n(x) = \sum_{n=1}^N (x^{n-1} - x^n) = 1 - x^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

da $x < 1$. Die Reihe konvergiert also punktweise.

Sie konvergiert allerdings nicht gleichmässig, da

$$\max_{0 \leq x \leq 1} (1 - (1 - x^N)) = 1.$$

Sie konvergiert jedoch im quadratischen Mittel

$$\int_0^1 dx |1 - (1 - x^N)|^2 = \int_0^1 dx x^{2N} = \frac{1}{2N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

2. Sei im Intervall $(0, 1)$

$$f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} - \frac{n-1}{1+(n-1)^2x^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^N f_n(x) = \frac{N}{1+N^2x^2} = \frac{1}{N[(1/N)^2 + x^2]} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Es ist also punktweise Konvergenz gegen die Funktion $f(x) = 0$ gegeben.

Allerdings konvergiert die Reihe nicht gleichmässig, da

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| 0 - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| = \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{N}{1+N^2x^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N.$$

Sie konvergiert genau so wenig im quadratischen Mittel, da

$$\int_0^1 dx \left| 0 - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 = \int_0^1 dx \frac{N^2}{(1+N^2x^2)^2} = N \int_0^N dy \frac{1}{(1+y^2)^2}$$

$$= \frac{N}{2} \left(\frac{Nl}{1+N^2} + \arctan(N) \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty.$$

Konvergenzsätze

Sei jetzt $f(x)$ eine auf $I = [a, b]$ definierte Funktion und $\sum_n a_n X_n(x)$ die Fourier-Reihe von f , wobei X_n eine der drei oben genannten Fourier-Reihen (gerade, ungerade, ganz) ist.

Satz 2.32 (Gleichmässige Konvergenz). *Die Fourierreihe $\sum_n a_n X_n(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x)$ in I , falls*

1. $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ existieren und stetig sind, d.h. $f \in C^2[a, b]$
2. $f(x)$ erfüllt die vorgegebene Randbedingung.

Dieser Satz sichert eine sehr starke Form der Konvergenz, wenn nur die Voraussetzungen an $f(x)$ und ihre Ableitungen erfüllt sind. Bei klassischen Fourier-Reihen muß man die Existenz von $f''(x)$ nicht voraussetzen.

Satz 2.33 (L^2 -Konvergenz). *Die Fourier-Reihe konvergiert auf (a, b) gegen $f(x)$ im quadratischen Mittel, vorausgesetzt, das Integral*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \quad (2.153)$$

ist endlich.

Dieser Satz sichert eine Form der Konvergenz unter sehr schwachen Voraussetzungen an die Funktion $f(x)$ (nicht einmal die Existenz der ersten Ableitung wird vorausgesetzt). Man kann hier das sehr allgemeine Lebesgue-Integral anstelle des üblichen Riemann-Integrals verwenden. Historisch gesehen war gerade eine wesentliche Motivation für das Lebesgue-Integral, dass dieser Satz für eine möglichst große Klasse von Funktionen gilt.

Der dritte Satz nimmt in Hinblick auf seine Voraussetzungen an $f(x)$ eine Zwischenstellung ein. Er erfordert weitere Begriffsbildungen. Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x = c$ eine Sprungstelle, wenn die einseitigen Grenzwerte $f(c+)$ und $f(c-)$ existieren, aber voneinander verschieden sind. Die Sprunghöhe ist die Zahl $f(c+) - f(c-)$. Eine Funktion heißt stückweise stetig auf dem Intervall I , wenn sie höchstens endlich viele Sprungstellen in I besitzt und in allen anderen Punkten stetig ist.

Satz 2.34 (Punktweise Konvergenz). *(i) Die Fourier-Reihe $\sum_n a_n X^n(x)$ einer Funktion $f(x)$ konvergiert auf I punktweise gegen $f(x)$, vorausgesetzt, $f(x)$ ist in I stetig und $f'(x)$ ist in I stückweise stetig. (ii) Sind, etwas allgemeiner, sowohl $f(x)$ als auch $f'(x)$ stückweise stetig in I , so konvergiert die Fourier-Reihe in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Ihr Summenwert ist*

$$\sum_n a_n X_n(x) = \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)) \quad \forall x \in (a, b) \quad (2.154)$$

Ihr Summenwert ist $\frac{1}{2}(f_{ext}(x+) + f_{ext}(x-)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, wobei $f_{ext}(x)$ die (periodische, gerade periodische oder ungerade periodische) Fortsetzung von $f(x)$ ist.

An einer Sprungstelle konvergiert die Reihe also gegen den Mittelwert der rechts- und linksseitigen Grenzwerte. Für das Folgende benötigen wir auch noch den Begriff stückweise glatt für Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 2.30. *Ein Funktion $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stückweise glatt, falls*

1. f abgesehen von einer endlichen Anzahl von Ausnahmepunkten $x_i \in I$ stetig differenzierbar ist
2. Die rechts- und linksseitige Grenzwerte $f(x_i+)$ und $f(x_i-)$ existieren.

Man schreibt $f \in PC([a, b])$. Falls f zudem stetig ist, dann ist $f \in PC^1([a, b])$ und falls auch die Ableitung stetig ist, dann ist $f \in PC^2([a, b]) = C^1[a, b]$.

Man kann zeigen, dass für die „Konvergenzgeschwindigkeit“ von Fourier-Reihen periodischer Funktionen f Folgendes gilt:

- falls f stückweise glatt ist, d.h. $f \in PC([a, b])$, dann konvergiert a_n zumindest wie $O(\frac{1}{n})$ gegen Null.
- falls f stückweise glatt und stetig ist, d.h. $f \in PC^1([a, b])$, dann konvergiert a_n zumindest wie $O(\frac{1}{n^2})$ gegen Null.
- falls f stückweise glatt und stetig differenzierbar ist, d.h. $f \in PC^2([a, b])$, dann konvergiert a_n zumindest wie $O(\frac{1}{n^3})$ gegen Null.

2.4.2 Fourier-Transformation

Wir gehen von der Fourier-Reihe einer auf $[-l, l]$ definierten Funktion $f(x)$ in ihrer komplexen Form aus

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l}x} \quad (2.155)$$

$$\text{mit } c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dy f(y) e^{-\frac{in\pi}{l}y}$$

aus. Wir setzen nun $k = n\pi/l$ und erhalten

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \underbrace{\int_{-l}^l dy f(y) e^{-iky}}_{F(k)} \underbrace{\frac{\pi}{l}}_{\Delta k} = \frac{(n+1)\pi}{l} - \frac{n\pi}{l} \quad (2.156)$$

Im Limes $l \rightarrow \infty$ geht dies in

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k) dk \quad (2.157)$$

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky} dy \quad (2.158)$$

über.³

Bemerkungen:

- Beachte, dass in der Literatur auch symmetrische Normierungen verwendet werden, d.h. vor beiden Integralen ein Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ steht.
- Die bei der Fourier-Transformation auftretenden Integrale werden auch Fourier-Integrale genannt.

Für die Berechnung von Fourier-Integralen ist der Residuensatz (siehe Kap. 2.3.5) sehr hilfreich, wie folgendes Beispiel zeigt. Zur Berechnung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + 1} dx$$

muss für die Anwendung des Lemma von Jordan die Fallunterscheidung $k > 0$ und $k < 0$ gemacht werden. Für $k = 0$ hatten wir in Kap. 2.3.5 bereits das Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi$$

erhalten. Wir beginnen mit $k > 0$ und schließen den Bogen K_R in der oberen Hälfte der komplexen Ebene. Damit ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{ikz}}{z^2 + 1}, i \right) = 2\pi i \frac{e^{-k}}{2i} = \pi e^{-k}$$

Für $k < 0$ schließen wir den Bogen in der unteren Hälfte. Dies impliziert, dass wir nun aufgrund der umgekehrten Durchlaufrichtung ein zusätzliches Vorzeichen bekommen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + 1} dx = -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{ikz}}{z^2 + 1}, -i \right) = -2\pi i \frac{e^{-k}}{-2i} = \pi e^k = \pi e^{-|k|}$$

Damit ergibt sich insgesamt unabhängig vom Vorzeichen von k :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|k|}.$$

Daraus folgt, dass auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|k|}$$

ist und damit ergibt sich weiters

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|k|}$$

³Für eine mathematisch saubere Behandlung inklusive Beweise, siehe z.B. Folland, G. „Introduction to Partial Differential Equations“, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976.

Wichtige Fourier-Transformationen sind:

	$f(x)$	$F(k)$
Delta-Distribution	$\delta(x)$	1
Konstante	1	$2\pi\delta(k)$
Heavyside-Funktion	$\Theta(x)$	$\pi\delta(k) + \frac{1}{ik}$
Signum-Funktion	$\text{sign}(x) = \Theta(x) - \Theta(-x)$	$\frac{2}{ik}$
Recheckimpuls	$\Theta(a - x)$	$\frac{2}{k} \sin(ak)$
Exponentialfunktion	$e^{-a x }$	$\frac{a}{a^2 + k^2}$
Gauß-Funktion	$e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\sqrt{2\pi}e^{-\frac{k^2}{2}}$

Eigenschaften der Fourier-Transformation Sei $F(k)$ die Fourier-Transformierte von $f(x)$, und $G(k)$ die von $g(x)$. Dann gelten folgende Regeln:

	Funktion	Transformierte
1)	$\frac{df(x)}{dx}$	$ikF(k)$
2)	$xf(x)$	$i\frac{dF(k)}{dk}$
3)	$f(x - a)$	$e^{ika}F(k)$
4)	$e^{ixa}f(x)$	$F(k - a)$
5)	$af(x) + bg(x)$	$aF(k) + bG(k)$
6)	$f(ax)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{k}{a}\right)$

Parsevalsche Gleichung (Satz von Plancherel) Vorausgesetzt, dass die nachfolgenden Integrale endlich sind, gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk |F(k)|^2 \quad (2.159)$$

Zudem gilt auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)g^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k)G^*(k) \quad (2.160)$$

Faltung: Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei auf \mathbb{R} definierte Funktionen. Dann definiert man die Faltung durch

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x - y)g(y) \quad (2.161)$$

Es gilt, dass die Fourier-Transformierte einer Faltung $(f \star g)(x)$ gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten $F(k)G(k)$ ist:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} (f \star g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ikx} f(x-y)g(y) \stackrel{z=x-y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ik(y+z)} f(z)g(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{ikz} f(z) \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iky} g(y) \\ &= F(k)G(k) \end{aligned} \quad (2.162)$$

Die Faltung hat die Eigenschaften:

$$(f \star g) = (g \star f) \quad (2.163)$$

$$(f \star g)' = f' \star g = f \star g' \quad (2.164)$$

$$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h \quad (2.165)$$

$$\delta \star f = f \quad (2.166)$$

wobei $\delta(x)$ die δ -Distribution ist.

Fourier-Transformation für mehrere Variable: Wir betrachten nun eine Funktion $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die von n Variablen abhängt und sei $\vec{x} \cdot \vec{k}$ das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{x} und \vec{k} . Dann lautet die Fouriertransformation:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n k F(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (2.167)$$

$$F(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x f(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (2.168)$$

2.4.3 Dirac- δ -Distribution

Sei C^∞ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Eine Distribution ist grob gesprochen eine Abbildung $C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, etwas genauer ein lineares stetiges Funktional. Sei $f \in C^\infty$, dann ist die Dirac- δ -Distribution⁴ $\delta_{x_0}[f]$ durch die Abbildung

$$f \mapsto \delta_{x_0}[f] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \quad (2.169)$$

mit

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq x_0 \\ \infty & \text{für } x = x_0 \end{cases} \quad (2.170)$$

und insbesondere gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) = 1 \quad (2.171)$$

⁴In der physikalischen Literatur ist oft etwas ungenau von der Dirac- δ -Funktion die Rede.

Man kann $\delta(x)$ als Grenzwert von Funktionen erhalten. Verschiedene äquivalente Beispiele sind:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

Integraldarstellung

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \quad (2.172)$$

Die nachfolgenden Rechenregeln sind immer unter einem Integral zu verstehen:

$$\begin{aligned} x \delta(x) &= 0 \\ \delta(x) &= \delta(-x) \\ f(x)\delta(x-y) &= f(y)\delta(x-y) \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x) \\ \delta(g(x)) &= \sum_{i, g(x_i)=0} \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x-x_i) \text{ mit } g'(x_i) = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \end{aligned}$$

Man kann die δ -Distribution als Ableitung der Heavyside-Funktion $\Theta(x)$ auffassen:

$$\delta(x) = \Theta'(x) \quad (2.173)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (2.174)$$

Man kann auch Ableitungen der δ -Distribution betrachten, indem man eine partielle Integration durchführt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x-x_0) f(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-x_0) f'(x) = -f'(x_0) \quad (2.175)$$

Dies kann verallgemeinert werden

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta^{(n)}(x-x_0) f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x_0) \text{ mit } f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) \quad (2.176)$$

Verallgemeinerung auf drei Dimensionen

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0) \cdot \delta(z-z_0) \quad (2.177)$$

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{-i\vec{k}\vec{x}} \quad (2.178)$$

2.5 Partialbruch- und Produktentwicklungen

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der Konstruktion meromorpher Funktionen (Verallgemeinerungen von rationalen Funktionen) aus vorgegebenen Singularitäten bzw. ganzer Funktionen (Verallgemeinerungen von Polynomen) aus vorgegebenen Nullstellen.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra läßt sich jedes Polynom folgendermaßen darstellen:

$$P_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n = a_k \prod_{\nu=1}^j (z - z_\nu)^{p_\nu}, \quad (2.179)$$

wobei z_ν die Nullstellen, p_ν ihre Vielfachheiten und j die Anzahl der verschiedenen Nullstellen sind. Es gilt $\sum_{\nu=1}^j p_\nu = m$. Gleichung (2.179) ist auf der eine Seite eine Faktorisierung des Polynoms $P_m(z)$ in einzelne Faktoren, umgekehrt stellt sie eine Konstruktion einer Funktion aus Nullstellen dar.

Jede rationale Funktion besitzt die Partialbruchdarstellung

$$R(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} = \sum_{\nu=1}^k \sum_{\mu=1}^{p_\nu} \frac{a_\mu^{(\nu)}}{(z - z_\nu)^\mu} + \sum_{\nu=1}^p c_\nu z^\nu \quad (2.180)$$

Diese Gleichung kann auch als Konstruktion einer rationalen Funktion aus vorgegebenen Singularitäten (Pole im Endlichen, Unendlichen) konstruieren. Die z_ν sind hierbei die endlich vielen Polstellen von $R(z)$.

Wir wollen diese beiden Aspekte auf unendlich viele Pole bzw. Nullstellen verallgemeinern. Damit stellt sich vor allem die Frage nach der Konvergenz solcher unendlicher Reihen bzw. Produkte stellen. In diesem Zusammenhang werden wir die Idee konvergenz erzeugender Summanden bzw. Faktoren kennenlernen.

2.5.1 Meromorphe Funktionen

Wir hatten in Kapitel 2.3.4 den Begriff des Hauptteils $h_a(z)$ einer meromorphen Funktion an einem Pol der Ordnung n bei $a \in \mathbb{C}$

$$h_a(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} \quad (2.181)$$

Definition 2.31. Eine Hauptteilverteilung H auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ ist eine Menge

$$H = \{h_a : a \in P\}$$

von Hauptteilen, wobei die Entwicklungspunkte a eine in U diskrete Menge P bilden.

Bemerkung: Eine Menge heißt diskret, falls sie keine Häufungspunkte besitzt.

Jede meromorphe Funktion definiert eine Hauptteilverteilung $H(f)$. Umgekehrt kann man sich die Frage stellen, ob es zu jeder vorgegebenen Hauptteilverteilung eine (oder mehrere)

meromorphe Funktionen gibt. Falls solch eine Funktion existiert, spricht man von einer Lösung einer vorgegebenen Hauptteilverteilung. Ist die Menge P endlich, ist die Frage einfach zu beantworten, da dann

$$f(z) = \sum_{a \in P} h_a(z) \quad (2.182)$$

eine Lösung darstellt. Sie ist nicht eindeutig, denn man kann zu ihr noch eine beliebige auf dem Gebiet U holomorphe Funktion addieren. Wir werden für das Folgende die Punkte $a \in P$ ordnen, d.h. es soll gelten

$$0 = a_0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots \leq |a_\nu| \leq |a_{\nu+1}| \leq \dots$$

Den Hauptteil bei a_ν bezeichnen wir nun mit $h_\nu(z)$. Man kann zeigen, dass es zu jeder vorgegebenen Hauptteilverteilung $H(f)$ eine bis auf eine holomorphe Funktion eindeutige Lösung gibt.

Satz 2.35 (Partialbruchsatz von Mittag-Leffler). *Sei $P \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Menge und H die dazugehörige vorgegebene Hauptteilverteilung. Dann existiert eine analytische Funktion*

$$f : \mathbb{C} \setminus P \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.183)$$

deren Hauptteil in $a_\nu \in P$ durch $h_\nu(z)$ gegeben ist, d.h.

$$f(z) - h_\nu(z)$$

hat bei $z = a_\nu$ eine hebbare Singularität.

Ist die Menge P nicht endlich, wird die Verallgemeinerung von Gl. (2.182)

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu(z) \quad (2.184)$$

im Allgemeinen nicht konvergieren. Die Konvergenz kann mit folgender Idee erzwungen werden: subtrahiere geeignete holomorphe Funktion $p_\nu(z)$ (z.B. Polynome):

$$f(z) = h_0(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu(z) - p_\nu(z)), \quad (2.185)$$

sodass die Summe überall gleichmäßig konvergiert. Aus diesem Grund bezeichnet man die Funktionen $p_\nu(z)$ als konvergenzerzeugende Summanden.

Eine Möglichkeit für $p_\nu(z)$ ist ein genügend langer Teil der Taylor-Reihe von $h_\nu(z)$ um den Nullpunkt, z.B. durch die Forderung

$$|h_\nu(z) - p_\nu(z)| \leq \frac{1}{\nu^2} \text{ für } |z| \leq \frac{|a_n|}{2}. \quad (2.186)$$

Ist diese Eigenschaft erfüllt, so ist

$$f(z) = h_0(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_\nu(z) - p_\nu(z))$$

eine Lösung der vorgegebenen Hauptteilverteilung (hier ist die Möglichkeit $h_1(z) = 0$ zugelassen). Zu dieser kann noch eine beliebige holomorphe Funktion $g(z)$ addiert werden.

Beispiel: Eine Anwendung des Residuuenatzes ist die Summierung gewisser Reihen. Die in Gl. (2.124) angegebene Formel beruht auf der Partialbruchzerlegung des Cotangens, welche wir nun durchführen.

Die Funktion

$$f(z) = \pi \cot \pi z$$

besitzt Pole 1. Ordnung bei $z = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ mit dem Residuum 1. Man kann also versuchen, $f(z)$ folgendermaßen entwickeln:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n}$$

Man sieht leicht, dass die beiden Summen divergieren. Als konvergenzerzeugende Summanden können wir $p_\nu(z) = -1/n$ bzw. $p_\nu(z) = 1/n$ für die erste bzw. zweite Summe wählen. Wir bekommen somit die Partialbruchdarstellung der Cotangensfunktion:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

Der letzte Schritt darf gemacht werden, da beide Summen absolut konvergent sind. Wir setzen nun $w = \pi z$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \cot w &= \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2w}{w^2 - \pi^2 n^2} = \frac{1}{w} + 2w \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{w^2}{\pi^4 n^4} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{w} - \frac{2w}{\pi^2} \frac{1}{6} - \frac{2w^3}{\pi^4} \frac{1}{90} - \dots = \frac{1}{w} - \frac{w}{3} - \frac{w^3}{45} - \dots \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (2.106).

2.5.2 Ganze Funktionen

Jede ganze Funktion $f(z)$ ohne Nullstellen läßt sich in der Form

$$f(z) = e^{h(z)} \tag{2.187}$$

mit $h(z)$ als ganze Funktion darstellen, da die Exponentialfunktion im Komplexen keine Nullstellen besitzt.

Für endlich viele Nullstellen besitzt $f(z)$ die Gestalt

$$f(z) = e^{h(z)} z^k \prod_{\nu=1}^p \left(1 - \frac{z}{z_\nu} \right)^{n_\nu}, \tag{2.188}$$

wobei k und n_ν die Vielfachheiten der Nullstellen sind und die Möglichkeit $k = 0$ mit eingeschlossen ist.

Analog zum vorigen Abschnitt dieses Kapitels wollen wir die Frage beantworten, ob man eine analytische Funktion existiert, falls unendlich viele Nullstellen vorgegeben werden. Dazu müssen wir uns mit der Konvergenz eines unendlichen Produktes beschäftigen.

Definition 2.32.

1. Es sei $\{a_\nu\}$ eine Zahlenfolge in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Das Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ existiert (konvergiert) und hat den Wert a , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1}^n a_\nu = a$$

ist und $a \neq 0$.

2. Ist $\{a_\nu\}$ eine beliebige Zahlenfolge in \mathbb{C} , so heißt das Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ konvergent, wenn fast alle $a_\nu \neq 0$ sind und

$$\prod_{\nu: a_\nu \neq 0} a_\nu$$

existiert. Ist mindestens ein $a_\nu = 0$, so ist der Wert eines derartigen Produktes Null.

Der Grund für diese etwas umständliche Definition liegt in der Sonderrolle der Null, da insbesondere für $a, b, c \neq 0$ gelten muss

$$ab = c \Rightarrow b = \frac{c}{a}$$

Aufgrund dieser Definition ist z.B.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

kein konvergentes Produkt.

In Analog zur Hauptteilverteilung definieren wir den Begriff der Nullstellenverteilung.

Definition 2.33. Eine Nullstellenverteilung ist eine Menge N von Paaren (a, n_a) , wobei $a \in \mathbb{C}$ und $n_a \in \mathbb{N}$ sind. Die Punkte a bilden eine diskrete Menge in \mathbb{C} .

Wir suchen nun eine Funktion $g(z)$, die für eine vorgegebene Nullstellenverteilung ihre Nullstellen der Ordnung n_a bei für alle a hat. Wir ordnen diese Menge analog zum vorigen Abschnitt

$$a_0 = 0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$$

und bezeichnen die resultierende Nullstellenverteilung als geordnet. In Analogie zum vorigen Abschnitt benötigt man konvergenzerzeugende Faktoren, um die Konvergenz des unendlichen Produktes zu erzwingen. Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes:

Satz 2.36 (Produktsatz von Weierstraß). *Es sei N eine geordnete Nullstellenverteilung. Wählt man Zahlen $k_\nu \in \mathbb{N}_0$ so, dass die unendliche Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu \left[\frac{1}{z - a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} \sum_{\mu=0}^{k_\nu} \left(\frac{z}{a_\nu} \right)^\mu \right]$$

lokal gleichmäßig konvergiert, so stellt das unendliche Produkt

$$g(z) = z^{n_0} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_\nu} \right) \exp \left(\sum_{\mu=1}^{k_\nu+1} \frac{1}{\mu} \left(\frac{z}{a_\nu} \right)^\mu \right) \right]^{n_\nu}$$

eine ganze Funktion dar, die ihre Nullstellen der Ordnung n_ν genau bei den $a_\nu \in \mathbb{C}$ hat.

Falls $k_\nu = -1$ ist die Summe in der obigen Exponentialfunktion Null zu setzen. Der Begriff der lokal gleichmäßigen Konvergenz ist zu Beginn des Kapitel 2.3.1 erklärt. Für den Beweis siehe [2], Kapitel VII.3. Weitere ganze Funktionen mit derselben Nullstellenverteilung erhält man über

$$f(z) = e^{h(z)} g(z)$$

wobei $h(z)$ ebenfalls eine ganze Funktion ist.

Beispiel: Wir suchen eine Produktdarstellung von $f(z) = \sin \pi z$. Diese Funktion $f(z)$ hat für $z_\nu = \nu$ einfache Nullstellen; nach dem Weierstraßschen Produktsatz mit $q_\nu = 1$ besitzt sie also die Entwicklung

$$\sin \pi z = e^{h(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{z/n} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n},$$

denn nach dem Beispiel des vorigen Abschnitts sind

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z \mp n} \pm \frac{1}{n} \right)$$

absolut konvergente Summen. Zur Bestimmung von $h(z)$ bilden wir die logarithmische Ableitung f'/f beider Seiten:

$$\pi \cot \pi z = h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z + n} - \frac{1}{n} \right).$$

Nach dem eben erwähnten Beispiel ist daher

$$h'(z) \equiv 0, \quad h(z) = \text{const.}$$

Da

$$\frac{\sin \pi z}{z}$$

bei $z = 0$ eine hebbare Singularität besitzt und dort den Wert π annimmt, muss gelten

$$e^{h(z)} = \pi.$$

Damit ergibt sich

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Setzt man nun wieder $w = \pi z$ und erhält man die Produktentwicklung des Sinus:

$$\sin w = w \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Dieselbe Argumentation führt zur Produktentwicklung des Cosinus:

$$\cos w = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{\pi^2 (n + 1/2)^2}\right).$$

Zur Vertiefung dieses Kapitels sei die Kapitel VII.1 und VII.2 von Ref. [2] bzw. die Kapitel IV.2 und IV.3 von Ref. [3] empfohlen.

2.6 Γ -Funktion

Von Euler stammt die Interpolation der Fakultäten durch eine einfache in der ganzen Ebene meromorphe Funktion, die (Eulersche) Γ -Funktion. Dies ist eine auf \mathbb{C} verallgemeinerte Integraldarstellung dieser Funktion:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (2.189)$$

Durch partielle Integration folgt für die Γ -Funktion

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \int_0^{\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt - [t^z t^{-t}]_0^{\infty} = z \Gamma(z). \quad (2.190)$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Funktionalgleichung ergibt sich für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n + 1) = n(n - 1)(n - 2) \dots 1 \cdot \Gamma(1). \quad (2.191)$$

Da

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (2.192)$$

ist, ergibt sich

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (2.193)$$

Damit kann man mit der Γ -Funktion die nur für natürliche Zahlen definierte Fakultät für beliebige komplexe Zahlen mit $\operatorname{Re}(z) > 0$ interpolieren. Für negative Realteile läßt sich die Funktion schrittweise über

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) = (z-1)(z-2)\Gamma(z-2) = \dots = \quad (2.194)$$

$$= (z-1)(z-2)\dots(z-n)\Gamma(z-n), \quad (2.195)$$

fortsetzen, d.h. sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 \geq \operatorname{Re}(z) > 0$, dann ist

$$\Gamma(z-n) = \frac{1}{(z-1)(z-2)\dots(z-n)}\Gamma(z). \quad (2.196)$$

Dies impliziert, dass $\Gamma(z)$ Pole 1. Ordnung bei $z = 0, -1, -2, \dots$ hat. Aus dieser Formel ergeben sich auch sofort die Residuen der Γ -Funktion:

$$\operatorname{Res}(\Gamma(z), -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.197)$$

Der reziproke Wert der Γ -Funktion ist eine ganze Funktion (siehe [3], Kapitel IV.1) mit folgender Produktdarstellung

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}. \quad (2.198)$$

Zur Bestimmung von $h(z)$ bilden wir zuerst

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} &= \frac{z}{z+1} e^{\overbrace{h(z)-h(z+1)}^{\Delta(z)}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{z}{n}}{1 + \frac{z+1}{n}}\right) e^{-\frac{z}{n} + \frac{z+1}{n}} \\ &= \frac{z}{z+1} e^{\Delta(z)} (1+z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{z}{n+1}}{1 + \frac{z+1}{n}}\right) e^{1/n} \\ &= z e^{\Delta(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} e^{1/n} \\ &= z e^{\Delta(z)} \exp \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (\ln n - \ln(n+1) + \frac{1}{n}) \right\} \\ &= z e^{\Delta(z)} \exp \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} (\ln 1 - \ln 2 + 1 + \ln 2 - \dots + \ln N - \ln(N+1) + \frac{1}{N}) \right\} \end{aligned}$$

Da sich die Logarithmen paarweise bis auf $\ln(N + 1)$ wegheben, bleibt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \ln(N + 1) \right) = \gamma_E = 0.5772 \dots \quad (2.199)$$

übrig. Die Konstante γ_E wird Euler-Mascheroni-Konstante (manchmal auch nur Eulerkonstante) genannt. Folglich ist

$$\frac{\Gamma(z + 1)}{\Gamma(z)} = z e^{\Delta(z)} e^{\gamma_E},$$

und schließlich wegen $\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$:

$$1 = e^{\Delta(z)} e^C = e^{h(z) - h(z+1) + \gamma_E} \iff h(z) = \gamma_E z.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} \quad (2.200)$$

und damit eine Produktdarstellung für die Γ -Funktion:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-Cz}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} e^{z/n} \quad (2.201)$$

Aus den Produktdarstellungen der Γ - und Sinusfunktion ergibt sich die sogenannte Eulersche Ergänzungsformel:

$$\Gamma(z) \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (2.202)$$

Für $z = \frac{1}{2}$ folgt insbesondere:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (2.203)$$

Eine andere Schreibweise der Γ -Funktion, die man aus Gl. (2.201) ableiten kann, ist

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \dots (z+n)} \quad (2.204)$$

Dies ist die Gaußsche Definition der Γ -Funktion.

Zum Abschluß wollen wir noch drei wichtige Formeln der Γ -Funktion angeben, ohne näher auf sie einzugehen (für weitere Details siehe z.B. [2, 3]):

- asymptotische Entwicklung

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n-1)2n} \frac{1}{z^{2n-1}} \right\} \quad (2.205)$$

Für große z müssen nur wenige Glieder der Summe im Exponenten berücksichtigt werden, um Genauigkeiten im Promillebereich zu erhalten.

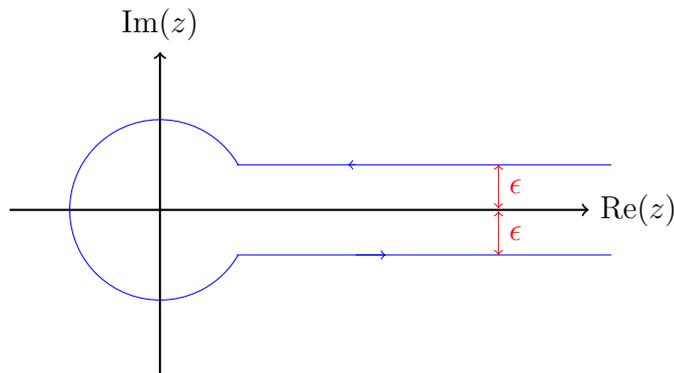
- Ein Spezialfall der asymptotischen Entwicklung ist die Stirlingsche Formel

$$n! = \Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (2.206)$$

- Hankelsche Formel

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_C \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta, \quad (2.207)$$

wobei wir mit C folgenden „uneigentlichen Schleifenweg“ bezeichnen

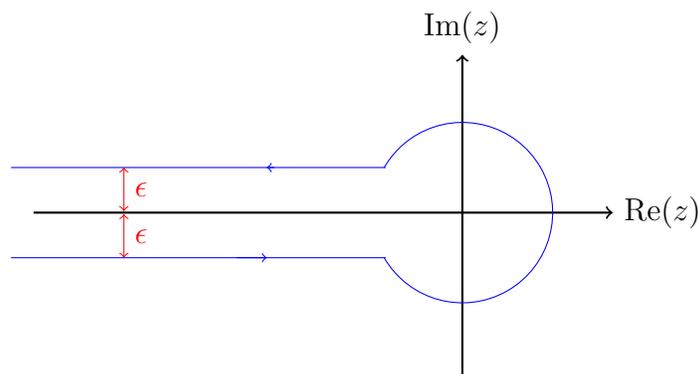


Alternative Darstellungen dieser Formel lauten

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \zeta^{-z} e^{\zeta} d\zeta \quad (2.208)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i \sin(\pi z)} \int_{C'} \zeta^{z-1} e^{\zeta} d\zeta, \quad (2.209)$$

wobei C' der zum vorigen Fall an der Im-Achse gespiegelte Weg ist



Dabei ist zu beachten, dass Ausdrücke wie ζ^z immer über den Hauptzweig des Logarithmus zu verstehen sind, da

$$\zeta^z = e^{z \ln \zeta}.$$

und im Falle von C der Verzweigungsschnitt entlang der positiven Re-Achse erfolgt und im von Fall von C' entlang der negativen Re-Achse.

2.7 Differentialgleichungen im Komplexen

Im Allgemeinen kann man alle Überlegungen und Resultate für Differentialgleichungen im Reellen auf Differentialgleichungen im Komplexen übertragen, indem man \mathbb{R} durch \mathbb{C} und „stetig differenzierbar“ durch „holomorph/„analytisch“ ersetzt.

2.7.1 Homogene lineare Systeme im regulären Fall

Gegenstand dieses Kapitels sind homogene lineare Systeme

$$\vec{w}'(z) = A(z)\vec{w}(z) \quad \text{mit } \vec{w}(z_0) = \vec{w}_0, \quad (2.210)$$

mit $A(z)$ als komplexe $n \times n$ -Matrix und $\vec{w}(z)$ als komplexen Vektor bestehend aus n Komponenten.

Wie im Reellen können wir folgern, daß n linear unabhängige Lösungen (Fundamentalsystem) $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n$ existieren, aus denen sich durch Linearkombination

$$\vec{w} = c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 + \dots + c_n\vec{w}_n \quad (c_i \in \mathbb{C}) \quad (2.211)$$

alle Lösungen ergeben.

Aus einem Fundamentalsystem $W(z) = (\vec{w}_1(z), \vec{w}_2(z), \dots, \vec{w}_n(z))$ erhält man alle Fundamentalsysteme in der Form

$$U(z) = CW(z) \quad C \text{ konst., regulär} \quad (2.212)$$

Die Wronski-Determinante $\det W(z)$ genügt der Differentialgleichung

$$(\det W(z))' = \text{Sp}(A(z)) \cdot \det W(z). \quad (2.213)$$

Ein Hauptsystem liegt vor, falls

$$W(z_0) = \mathbb{1}_n. \quad (2.214)$$

Satz 2.37. $G \subset \mathbb{C}$ sei einfach zusammenhängend. Ist $A(z)$ holomorph in G , $z_0 \in G$, so besitzt

$$\vec{w}'(z) = A(z)\vec{w}(z) \quad \text{mit } \vec{w}(z_0) = \vec{w}_0 \quad (2.215)$$

genau eine Lösung. Diese ist $\forall z \in G$ holomorph.

Für den Beweis siehe [7], §21.

2.7.2 Systeme mit isolierten Singularitäten

$A(z)$ soll endlich viele isolierte Singularitäten haben. Wir untersuchen zunächst das Verhalten der Lösungen anhand von drei Beispielen.

1. Es sei $n = 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und

$$w'(z) = \frac{\alpha}{z}w(z),$$

wobei $z = 0$ ein Pol erster Ordnung und α das Residuum von $A(z)$ ist. Eine Lösung lautet

$$w = w_0 \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^\alpha.$$

$z = 0$ ist i.a. Verzweigungspunkt.

2. Beim System ($n = 2$)

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

ist $A(z)$ singularär und hat einen Pol erster Ordnung bei $z = 0$. Ein Fundamentalsystem von Lösungen lautet

$$W(z) = \begin{pmatrix} \ln z & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $z = 0$ ist die Lösung ∞ -fach mehrdeutig.

3. Eulersche Systeme

$$\vec{w}'(z) = \frac{1}{z}A\vec{w}(z)$$

Setzt man $z = e^s$ und $\vec{v}(s) := \vec{w}(e^s)$, erhält man

$$\frac{d\vec{w}}{dz} = \frac{d\vec{v}}{ds} \frac{ds}{dz} = \frac{d\vec{v}}{ds} e^{-s} \stackrel{\text{Dgl.}}{=} \frac{A}{e^s} \vec{v}, \text{ d.h. } \vec{v}'(s) = A\vec{v}(s)$$

Wir wissen aus Teil I, Kapitel 1.4.5, daß für diese Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ein Fundamentalsystem in der Form

$$V(s) = e^{As}$$

existiert. Also ist

$$W(z) = e^{A \ln z} = z^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (\ln z)^k}{k!}$$

$z = 0$ ist i.a. Verzweigungspunkt. Falls A diagonalisierbar ist, erhält man

$$W = C W_D = C \begin{pmatrix} z^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & z^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Falls man A in eine Jordansche Normalform bringen kann, ergibt sich

$$Z_i = z^{\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & \ln z & \frac{\ln^2 z}{2} & \dots & \frac{\ln^{r-1} z}{(r-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\ln^2 z}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ln z \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Rücktransformation ergibt die Lösungsmatrix

$$W = C Z = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{11} \ln z + c_{12} & c_{11} \frac{\ln^2 z}{2} + c_{12} \ln z + c_{13} & \dots \\ c_{21} & c_{21} \ln z + c_{22} & c_{21} \frac{\ln^2 z}{2} + c_{22} \ln z + c_{23} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n1} \ln z + c_{n2} & c_{n1} \frac{\ln^2 z}{2} + c_{n2} \ln z + c_{n3} & \dots \end{pmatrix}$$

Es zeigt sich, daß diese Beispiele repräsentativ für beliebige Systeme mit einer isolierten Singularität bei $z = 0$ sind. Dies ist im nachfolgende Satz zusammengefasst, der zeigt, dass die Lösungen Potenzen von eindeutigen holomorphen Funktionen mit z^λ oder $\ln z$ sind. Andere Arten von mehrdeutigen Funktionen treten nicht auf.

Satz 2.38.

Sei $A(z)$ in einem Kreis K mit Radius r um $z = 0$ mit $0 < |z| < r$ eindeutig und holomorph, dann existiert ein Fundamentalsystem von der Form

$$W(z) = U(z) z^B, \tag{2.216}$$

wobei $U(z)$ eine in $K_r(0)$ eindeutige holomorphe Funktion und B eine reguläre, konstante Matrix ist.

Hier ist

$$z^B = e^{B \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k (\ln z)^k$$

Der volle Beweis findet sich in [7], §22. Wir geben hier die Beweisidee: Ist $W(z)$ ein Fundamentalsystem und $V(s) = W(e^s)$, so gilt

$$\frac{dV}{ds} = e^s \frac{dW}{dz} = e^s A(e^s) V(s)$$

mit der Lösung $V(s)$. Nun ist aber, da $e^s A(e^s)$ periodisch mit der Periode $2\pi i$ ist, auch $V(s+2\pi i)$ eine Lösung. Also ist nach Gl. (2.212)

$$V(s + 2\pi i) = V(s)C = V(s)e^{2\pi i B}$$

mit der regulären Matrix C . Für die Funktion

$$T(s) := V(s)e^{-Bs}$$

gilt daher

$$T(s + 2\pi i) = V(s + 2\pi i)e^{-B(s+2\pi i)} = V(s)e^{2\pi i B} e^{-Bs} e^{-2\pi i B} = T(s)$$

d.h. T ist $2\pi i$ -periodisch. Damit ist $U(z) = T(\ln z)$ eindeutig in $K_r(0)$, und

$$W(z) = V(\ln z) = T(\ln z)e^{B \ln z} = U(z)z^B$$

Bemerkung: Verhalten der Lösungen für $|A(z)| \leq c|z|^{-m}$, $c > 0$ und $0 < |z| \leq r/2$:

- $m = 1$: $A(z)$ hat einen Pol erster Ordnung bei $z = 0$ und man findet

$$|\vec{w}(z)| \leq a|z|^{-b}$$

Die Lösung besitzt einen Verzweigungsschnitt.

- $m > 1$: $A(z)$ hat einen Pol höherer Ordnung bei $z = 0$ und man findet

$$|\vec{w}(z)| \leq ae^{b|z|^{1-m}}$$

Die Lösung besitzt eine wesentliche Singularität.

In beiden Fällen sind die Konstanten $a, b > 0$ und hängen im Falle von mehrdeutigen Funktionen vom entsprechenden Riemann-Blatt ab. Ein Beweis findet sich z.B. bei [7] §22.

2.7.3 Schwach singuläre Stellen, Differentialgleichungen vom Fuchs-schen Typ

Schwach singuläre Stellen

Definition 2.34. Die Matrix $A(z)$ sei für $0 < |z - z_0| < r$ eindeutig und holomorph. Die Stelle $z = z_0$ heißt schwach singuläre Stelle für die Differentialgleichung $\vec{w}' = A(z)\vec{w}$, wenn $A(z)$ an der Stelle z_0 einen Pol 1. Ordnung hat. Es ist also vorausgesetzt, daß $A(z)$ eine Potenzreihenentwicklung

$$A(z) = \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z - z_0)^k \quad \text{mit } A_0 \neq 0 \quad (2.217)$$

besitzt, welche in $0 < |z - z_0| < r$ konvergiert. Ist eine Stelle z weder holomorph noch schwach singulär, so heißt sie stark singulär.

Wir setzen im Folgenden $z_0 = 0$, da dies durch eine Translation immer erreicht werden kann.

Es gilt nach Gl. (2.216)

$$W(z) = U(z)z^B = (U(z)z^k) z^{B-k\mathbb{1}} \quad k \text{ ganz}; \quad (2.218)$$

aber $U(z)$ besitzt an der Stelle $z = 0$ höchstens einen Pol, d.h. $U(z)z^k$ ist holomorph in $0 \leq |z| < r$ falls k der Ordnung des Pols entspricht, d.h. damit kann ein $\tilde{U}(z) = U(z)z^k$ gefunden werden, welches auch bei $z = 0$ holomorph ist. Der Lösungstyp ist also aufgebaut aus

$$W(z) = z^\lambda (U_1(z) + U_2(z) \ln z + \dots + U_k(z) \ln^{k-1} z), \quad (2.219)$$

wobei hier $U_1(z), U_2(z), \dots, U_k(z)$ Matrizen sind.

Singularitäten im Unendlichen: Wir betrachten die Differentialgleichung $\vec{w}' = A(z)\vec{w}$, wobei $A(z)$ für $|z| > r$ holomorph sei. Wenn $\vec{w}(z)$ eine Lösung ist, setzen wir $\vec{v}(\zeta) = \vec{w}(1/\zeta)$ und erhalten

$$\vec{v}'(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2} A\left(\frac{1}{\zeta}\right) \vec{v}(\zeta). \quad (2.220)$$

Der Punkt $z = \infty$ heißt (i) holomorph bzw. (ii) schwach singular bzw. (iii) stark singular, wenn der Punkt $\zeta = 0$ die entsprechende Eigenschaft besitzt. Die ist genau dann der Fall, wenn in der Laurent-Entwicklung

$$A\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m \left(\frac{1}{\zeta}\right)^m \quad (2.221)$$

(i) alle B_m mit $m \leq 1$ verschwinden bzw. (ii) alle B_m mit $m \leq 0$ verschwinden und $B_1 \neq 0$ ist bzw. (iii) nicht alle B_m mit $m \leq 0$ verschwinden.

Satz 2.39.

$A(z)$ sei für $|z| > r$ holomorph.

$$z = \infty \text{ ist } \begin{cases} \text{holomorph,} & \text{falls } A(z) = \frac{B_2}{z^2} + \frac{B_3}{z^3} + \dots \\ \text{schwach singular,} & \text{falls } A(z) = \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \frac{B_3}{z^3} + \dots \\ \text{stark singular} & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.222)$$

Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typ

Definition 2.35. Die Differentialgleichung $\vec{w}' = A(z)\vec{w}$ heißt vom Fuchsschen Typ, wenn sie endlich viele schwach singuläre Stellen besitzt und ansonsten $A(z)$ holomorph ist.

Satz 2.40. Die Differentialgleichung ist genau dann vom Fuchsschen Typ, wenn

$$A(z) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{z - z_j} R_j \quad (2.223)$$

ist, wobei die R_j konstante Matrizen $\neq 0$ sind. Dabei ist ∞ eine holomorphe oder schwach singuläre Stelle, je nachdem ob

$$\sum_{j=1}^k R_j = 0 \text{ oder } \neq 0 \text{ ist.}$$

Für den Beweis siehe [7] §23.V.

Bemerkung: Es gibt somit (außer $A(z) \equiv 0$) keine Fuchssche Differentialgleichung mit keiner oder nur einer schwachen Singularität.

Man kann Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typ auf Eulersche Systeme (vgl. Kapitel 2.7.2) zurückführen, wie man an nachfolgenden Beispiel sieht:

Beispiel:

$$\vec{w}' = \left(\frac{A}{z - z_1} - \frac{A}{z - z_2} \right) \vec{w} \text{ mit } A = \text{const.}$$

mit Singularitäten bei z_1 und z_2 . Setzt man

$$\xi = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

erhält man

$$z = \frac{z_2 \xi - z_1}{\xi - 1}$$

und damit

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{z_2 \xi - z_2 - z_2 \xi + z_1}{(\xi - 1)^2} = \frac{z_1 - z_2}{(\xi - 1)^2}.$$

Die Transformation $\vec{w}(z) = \vec{u}(\xi)$ liefert

$$\frac{d\vec{u}}{d\xi} = \frac{d\vec{w}}{dz} \frac{dz}{d\xi} = A \frac{dz}{d\xi} \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} \right) \vec{u}.$$

Nun ist weiter

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} &= (\xi - 1) \left(\frac{1}{z_2 \xi - z_1 - z_1 \xi + z_1} - \frac{1}{z_2 \xi - z_1 - z_2 \xi + z_2} \right) = \\ &= (\xi - 1) \left(\frac{1}{\xi(z_2 - z_1)} - \frac{1}{z_2 - z_1} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{d\xi} &= A \frac{z_1 - z_2}{(\xi - 1)^2} (\xi - 1) \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \frac{1}{z_2 - z_1} \vec{u} = \frac{A}{\xi} \vec{u} \\ \Rightarrow \vec{u}'(\xi) &= \frac{A}{\xi} \vec{u}(\xi) \end{aligned}$$

Man erhält also ein Eulersches System und eine Lösung bekommt man dann analog zum dritten Beispiel in Kapitel 2.7.2.

Fuchssche Differentialgleichungen 2.Ordnung

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0. \quad (2.224)$$

Die übliche Transformation liefert das äquivalente System

$$\vec{w}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(z) & p(z) \end{pmatrix} \vec{w} \quad \text{für } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}. \quad (2.225)$$

Daraus ergibt sich, dass die Stelle $z_0 = 0$ holomorph oder schwach singular ist, wenn die Funktionen $p(z), q(z)$ bei $z = 0$ höchstens einen Pol erster Ordnung haben. Man erhält ein allgemeineres Ergebnis, wenn man Gl. (2.224) gemäß $w_1 := w$ und $w_2 := zw'$ transformiert. Es ergibt sich damit nach einfacher Rechnung

$$\vec{w}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ -zq(z) & \frac{1}{z} - p(z) \end{pmatrix} \vec{w} \quad \text{für } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ zw' \end{pmatrix}. \quad (2.226)$$

Für dieses System ist $z_0 = 0$ offenbar auch dann noch eine schwach singular Stelle, wenn $q(z)$ an dieser Stelle einen Pol zweiter Ordnung und $p(z)$ einen Pol höchstens erster Ordnung besitzt.

Singularitäten im Unendlichen: Die Klassifikation an der Stelle $z_0 = \infty$ wird wie oben durchgeführt, indem man die Differentialgleichung mit $\zeta = 1/z$ transformiert. Für $\vec{v}(\zeta) = \vec{w}(1/\zeta)$ ergibt sich aus Gl. (2.224)

$$v''(\zeta) + \left(\frac{2}{\zeta} - \frac{p(1/\zeta)}{\zeta^2} \right) v'(\zeta) + \frac{q(1/\zeta)}{\zeta^4} v(\zeta) = 0 \quad (2.227)$$

Analog zu den Systemen 1. Ordnung ergibt sich:

Satz 2.41. $p(z), q(z)$ seien für $|z| > r$ holomorph.

$$z = \infty \begin{cases} \text{holomorph, falls} & p(z) = \frac{p_0}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \dots \\ & q(z) = \frac{q_4}{z^4} + \dots \\ \text{schwach singular, falls} & p(z) = \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \dots \\ & q(z) = \frac{q_2}{z^2} + \frac{q_3}{z^3} + \dots \\ \text{stark singular sonst} & \end{cases} \quad (2.228)$$

Beispiel

$$w'' + \frac{1}{z^2}w' - \frac{4}{z(z+2)}w = 0$$

$$z = 0 : \left\{ \begin{array}{l} p(z) = \frac{1}{z^2} \\ q(z) = -\frac{2}{z}(1 - \frac{z}{2} - \dots) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{stark singular} \ddot{a}r$$

$$z = -2 : \left\{ \begin{array}{l} p(z) = \frac{1}{4} + \mathcal{O}(z+2) \\ q(z) = \frac{1}{z+2}(2 + \mathcal{O}(z+2) + \dots) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{schwach singular} \ddot{a}r$$

$$z = \infty : \left\{ \begin{array}{l} p(z) = \frac{1}{z^2} \\ q(z) = -\frac{4}{z^2} + \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \text{schwach singular} \ddot{a}r$$

Wir untersuchen nun das Verhalten der Lösung von der DGL in Gl. (2.224) in der Umgebung der schwachen Singularität bei $z = 0$, d.h. es sei

$$p(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad q(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k, \quad (0 < |z| < r). \quad (2.229)$$

Für das zugehörige System, Gl. (2.226), ist also

$$A(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -z^2 q(z) & 1 - zp(z) \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q_0 & 1 - p_0 \end{pmatrix}. \quad (2.230)$$

Setzt man das charakteristische Polynom von A_0

$$P(\lambda) = \det(A_0 - \lambda E) = \lambda(\lambda + p_0 - 1) + q_0 = 0, \quad (2.231)$$

erhält man die sogenannte Indexgleichung, ihre Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 - p_0 \pm \sqrt{(1 - p_0)^2 - 4q_0} \right)$$

nennt man auch Indizes bezüglich der Gl. (2.224).

Es existiert nun ein Fundamentalsystem der Form

$$w_1(z) = z^{\lambda_1} h(z) \quad (2.232)$$

$$w_2(z) = z^{\lambda_2} (h_1(z) + h_2(z) \ln z) \quad (2.233)$$

mit holomorphen Funktionen h, h_1, h_2 für $|z| < r$. Ein logarithmischer Anteil tritt höchstens dann auf, wenn

$$\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{Z},$$

dann ist aber der beim Logarithmus auftretende Faktor $z^{\lambda_2} h_2(z)$ ebenfalls eine Lösung von Gl. (2.224) und damit ein Vielfaches von w_2 .

Man kann also in diesem Fall

$$w_2(z) = z^{\lambda_2} h_1(z) + w_1(z) \ln z \quad (2.234)$$

ansetzen. Weiterführendes zu den bisherigen Abschnitten in diesem Kapitel über DGLs im Komplexen findet man z.B. [7].

Hypergeometrische Differentialgleichung

Einen wichtigen Spezialfall der Fuchsschen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit drei Singularitäten ist die hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(z-1)Y'' + [(a+b+1)z-c]Y' + abY = 0 \quad (2.235)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Sie hat drei schwache Singularitäten an den Stellen $0, 1$ und ∞ .

In der Form des vorigen Abschnittes ergibt sich insbesondere für eine Entwicklung um die Singularität bei $z = 0$:

$$Y'' + \frac{(a+b+1)z-c}{z(z-1)}Y' + \frac{ab}{z(z-1)}Y = 0 \quad (2.236)$$

$$\Rightarrow p(z) = \frac{(a+b+1)z-c}{z(z-1)} \Rightarrow p_0 = c \quad (2.237)$$

$$q(z) = \frac{ab}{z(z-1)} \Rightarrow q_0 = 0 \quad (2.238)$$

$$\Rightarrow A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-c \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1-c \quad (2.239)$$

Da $\lambda_1 = 0$, wollen wir die hypergeometrische Differentialgleichung mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes um $z = 0$ lösen:

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad oBdA: \alpha_0 = 1. \quad (2.240)$$

Damit geht die Gl. (2.235) in

$$z(z-1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\alpha_n z^{n-2} + [(a+b+1)z-c] \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} + ab \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = 0 \quad (2.241)$$

über. Ein Koeffizientenvergleich der Potenzen von z liefert nun

$$z^0: -c\alpha_1 + ab\alpha_0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_0 \frac{ab}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$z^1: -2\alpha_2 + (a+b+1)\alpha_1 - 2c\alpha_2 + ab\alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{(a+b+1) + ab}{2(c+1)} \alpha_1 = \frac{(a+1)(b+1)}{c+1} \frac{\alpha_1}{2} = \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{1}{1 \cdot 2}$$

⋮

$$z^n: n(n-1)\alpha_n - n(n+1)\alpha_{n+1} + (a+b+1)n\alpha_n - c(n+1)\alpha_{n+1} + ab\alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{n+1} = \frac{n(n-1) + n(a+b+1) + ab}{c(n+1) + n(n+1)} \alpha_n = \frac{ab + na + nb + n^2}{(n+1)(c+n)} \alpha_n = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} \alpha_n$$

Damit findet man als Lösung die hypergeometrische Reihe (oder auch Gaußsche Reihe):

$$\begin{aligned} F(a, b, c; z) &= 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n) \Gamma(b+n) \Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}, \end{aligned} \quad (2.242)$$

mit

$$(a)_n = \underbrace{a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1)}_{n \text{ Faktoren}}$$

und $(a)_0 = 1$, analog für b und c . Die Schreibweise $(a)_n$ wird als Pochhammer-Symbol bezeichnet. c in Gl. (2.242) darf weder Null noch eine negative ganze Zahl sein, da sonst die Reihe nicht definiert wäre. Die hypergeometrische Reihe konvergiert für $|z| < 1$ und ist symmetrisch in a, b , d.h.

$$F(a, b, c; z) = F(b, a, c; z) \quad (2.243)$$

Wenn a oder b Null oder negativ ganzzahlig sind, bricht die Reihe ab und man erhält ein Polynom als Lösung. Ferner erhält man für $a = 1$ und $b = c$ die geometrische Reihe.

Die hypergeometrische Reihe ist selbst wiederum ein Spezialfall der allgemeineren Reihe:

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_q)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (2.244)$$

Es gilt also

$$F(a, b, c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z). \quad (2.245)$$

Für die hypergeometrische Funktion existiert folgende Integraldarstellung:

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b) \Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt \quad (2.246)$$

mit $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$. Einige elementare Beispiele von Spezialfällen der hypergeometrischen Funktion sind:

$$\begin{aligned} F(-\alpha, 1, 1; -z) &= (1+z)^\alpha \\ F(1, 1, 2; -z) &= \frac{\ln(1+z)}{z} \\ F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right) &= \cos(n \arcsin z) \\ F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right) &= \frac{1}{z} \arcsin z \end{aligned}$$

Zudem erhält man verschiedenste Funktionen und Polynome als Spezialfälle, wie z.B.

- Legendre-Polynome
- Tschebyscheff-Polynome
- Jacobi-Polynome
- Gegenbauer-Polynome
- Elliptische Integrale
- Integrale von Besselfunktionen

Besselsche Differentialgleichung

Siehe Mathe 3 Skript, Kapitel 2.8.2.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Behnke, F. Sommer F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [2] W. Fischer, I. Lieb: Funktionentheorie, Vieweg+Teubner
- [3] E. Freitag, R. Busam: Funktionentheorie 1, Springer
- [4] E. Freitag: Funktionentheorie 2, Springer
- [5] K. Jänich: Einführung in die Funktionentheorie, Springer
- [6] R. Remmert, Funktionentheorie II, Springer 1995
- [7] W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer 2000
- [8] H. Weyl: Einführung in die Funktionentheorie, Birkhäuser